Université Claude Bernard (Lyon 1) Printemps 2017-2018
UE-MAT2030L Algèbre IV : algèbre géométrique

EXAMEN FINAL

Durée : 2 heures. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable ne sont authorisés

---

Exercice 1.

1. (a) Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ déterminer la matrice A de la projection orthogonale Φ sur la droite d'équation $x_1 = x_2$.
   Indication : Donner un vecteur-directeur de la droite en question et preciser comment Φ agit sur les vecteurs de la base canonique.
   (b) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle Φ a pour matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et écrire la relation entre A et B.
2. (a) Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ déterminer la matrice C de la symétrie Ψ par rapport à la droite d'équation $x_2 = \sqrt{3}x_1$.
   Indication : Donner un vecteur-directeur de la droite en question et preciser comment Φ agit sur les vecteurs de la base canonique.
   (b) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle Ψ a pour matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et écrire la relation entre C et D.

Exercice 2.
On note $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels. On considère un espace euclidien $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ muni d'un produit scalaire suivant :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y\rangle := {}^tX \cdot Y,$$

donné par le produit usuel des matrices.
Soit $S \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.
Rappel :
— la matrice S est symétrique si pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $\langle X, SX\rangle = \langle SX, X\rangle$.
— la matrice S est définie positive si pour tout vecteur $X \neq 0, X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ on a $\langle X, SX\rangle > 0$.

1. Montrer que toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.
2. Citer les résultats du cours qui permettent d'affirmer qu'il existe une matrice R et une matrice P telles que $S = {}^tPR^2P$.
3. En déduire qu'il existe une matrice inversible M telle que $S = {}^tMM$.
4. Soient a, b, c des réels. À quelles conditions sur a, b, c la matrice
$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$
est-elle définie positive ?
5. Donner un exemple d'une matrice $n \times n$ (avec $n \geq 2$) symétrique définie positive.

Exercice 3.
On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'espace des matrices 2×2 à coefficients complexes.
On pose $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) |\ A = {}^t\overline{A} \text{ et } \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$.
   (a) Montrer que A est de la forme $\begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix}$ avec a, r, s réels.

(b) En déduire que V est un espace vectoriel réel de dimension 3 dont une base $\mathcal{B}$ est formée par les matrices

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Montrer que l'application définie sur $V \times V$ par :

$$(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AB)$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel V.

(d) En notant $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ la norme de A, exprimer $\|A\|^2$ en fonction du déterminant de A.

(e) Pour j, k appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, calculer les produits scalaires $\langle E_j, E_k \rangle$. Que peut-on dire de la base $\mathcal{B}$?

2. Soit $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice telle que ${}^t\overline{P} = P^{-1}$. On note l_P l'endomorphisme de V défini par :

$$\forall A \in V, \quad l_P(A) = PAP^{-1}.$$

(a) Montrer que l_P est un endomorphisme *orthogonal* de V muni du produit scalaire défini ci-dessus, c'est-à-dire $\|l_P(A)\| = \|A\|$.

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère $P = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. Pour $j = 1, 2, 3$ exprimer $l_P(E_j)$ comme combinaison linéaire de E_1, E_2, E_3 (on rappelle que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$).

(c) Donner la matrice de l_P dans la base $\{E_1, E_2, E_3\}$ et en déduire que l_P est une rotation de l'espace euclidien V dont on donnera un vecteur qui dirige l'axe de rotation.