## Algebra IV. CC - mars 2018 artie H Exercice 1. Produit scalaire Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère la fonction f qui aux vecteurs $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ associe le réel $f(u, v) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$ . 1. Montrer que f munit $\mathbb{R}^3$ d'une structure euclidienne. 2. Quelle est, dans la base canonique, la matrice de produit scalaire donné par f? 3. Former, par la méthode de Gram-Schmidt, une base orthonormée $\{q_1,q_2,q_3\}$ par rapport à f à partir de la base canonique $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 4. Quelle est la matrice Q, tel que $q_1 = Qe_1$ , $q_2 = Qe_2$ et $q_3 = Qe_3$ ? 5. Quelle est la matrice de f dans la base $\{q_1, q_2, q_3\}$ ? structure enclidienne = product scalaire Symbolique - f(u,v) = f(v,u)definie: f(u,u) = 0 = 7 u = 0 $f(x,-2x_2)(x,-2x_3) + x_2 \cdot x_2 + (x_2 + x_3)(x_2 + x_3)$ alors (x,-2x2)2+ x2+ (x2+x3)2=0 parit ve: evident - f(u,u) > 0 & u est une somme de cavirés. La matrice de produit scalaire est var la matrice A telle que =, 9, = 2, , |e, || = Ke, , e, > = V/ 91

## Exercice 2. Cauchy-Schwarz

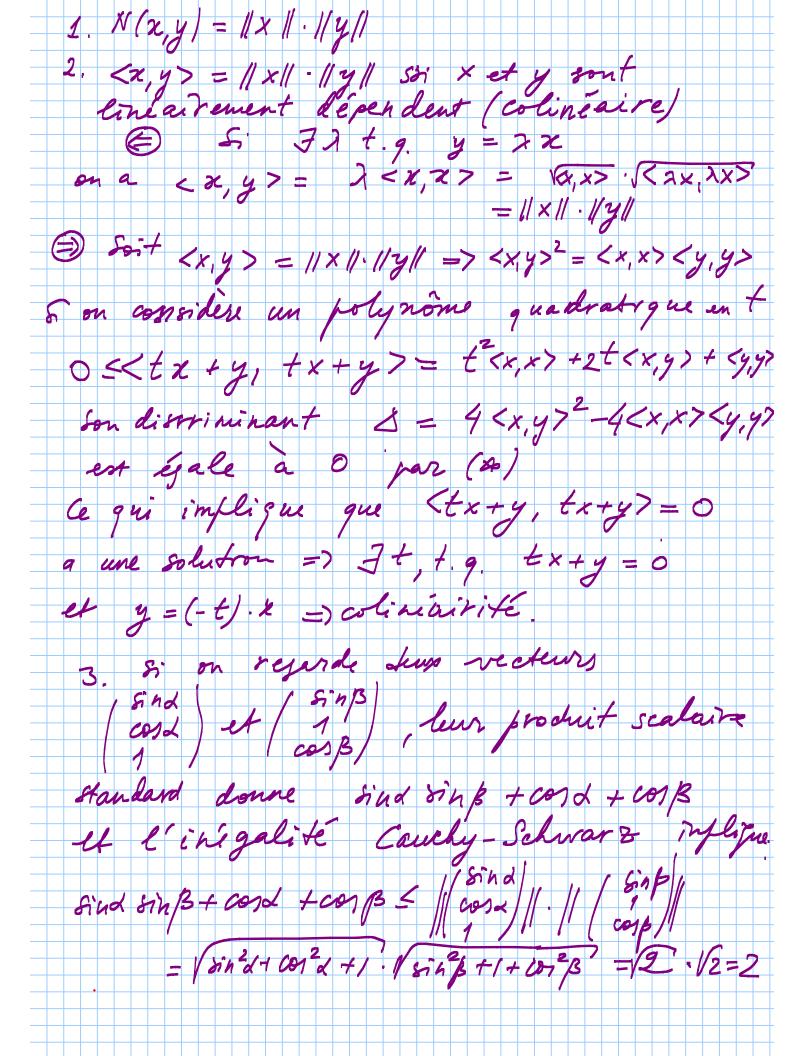
1. Quelle est l'expression N(x,y) dans l'enoncé suivant du théorème de Cauchy-Schwarz : Soit  $(E, <\cdot, \cdot>)$  un espace vectoriel euclidien. Alors pour tout x,y de E on a une inégralité

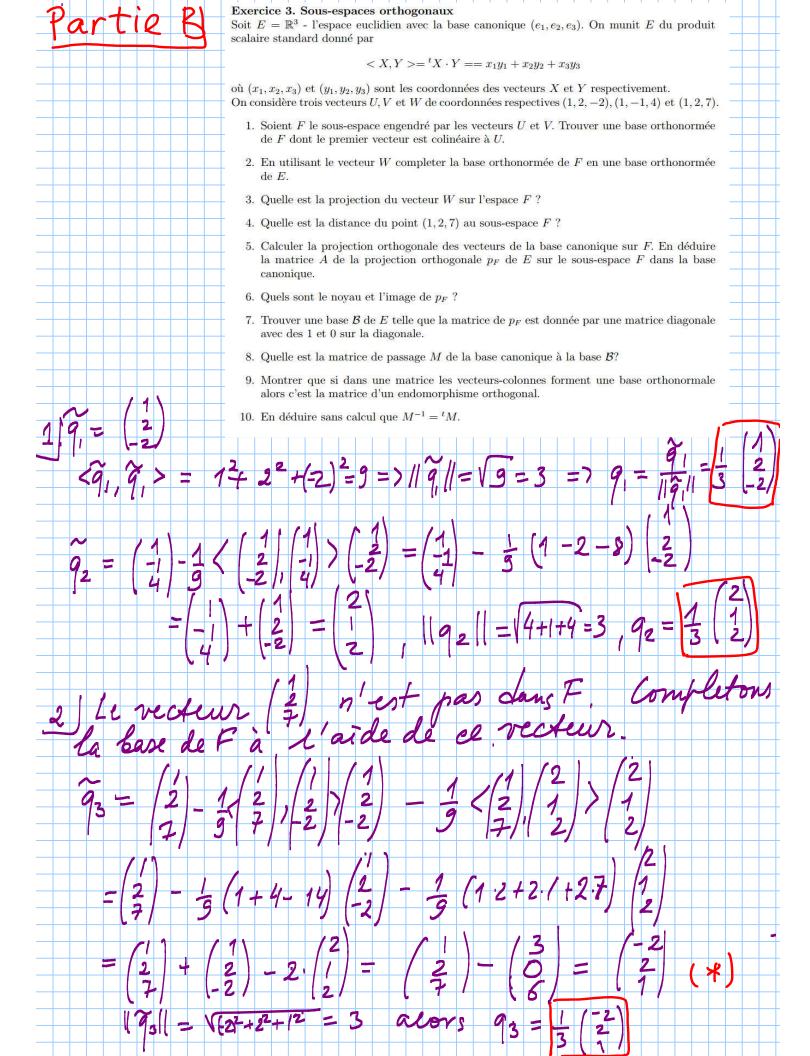
$$\langle x, y \rangle \leq N(x, y).$$

- 2. Quelle est la condition sur x et y pour que < x, y > soit égale à N(x,y). La démontrer.
- 3. On veut montrer que pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  on a l'inégalité

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha + \cos \beta \le 2.$$

Pour cela peut-on voir la partie gauche comme < x, y > avec  $x, y \in \mathbb{R}^3$  judicieusement choisis? Finir l'argument en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.





3) La décomposition (\*) de 2) donne

(1) = (-2) + (3) où (-2) & F^{\perp} et (3) & F, donc 
$$P_{F}(\frac{1}{2}) = (3)$$

4) La distance —  $\|(\frac{-2}{4})\| = \sqrt{2^{2}+2^{2}+1} = 3$ 

5) La matrice A de projection  $P_{F}(\frac{1}{2})\| = \sqrt{2^{2}+2^{2}+1} = 3$ 

Li to (2, 9, > 9, + (2, 92) 92 — première de trois et en el cotonne el cotonne

8.) La matrice de passage est donnée natrice dont les colonnes sont C2, C3 - les vecturs ponnent la base or thos On reut m.g. +MM= Id que M On conclut alors que Mici es orthegonale, c.ad MM = Id => M =