Algèbre IV. CC - mars 2018

Partie A

Exercice 1. Produit scalaire

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère la fonction f qui aux vecteurs $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, associe le réel $f(u,v) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$.

1. Montrer que f munit $\mathbb{R}^3$ d'une structure euclidienne.
2. Quelle est, dans la base canonique, la matrice de produit scalaire donné par f ?
3. Former, par la méthode de Gram-Schmidt, une base orthonormée $\{q_1, q_2, q_3\}$ par rapport à f à partir de la base canonique $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
4. Quelle est la matrice Q, tel que $q_1 = Qe_1,\ q_2 = Qe_2$ et $q_3 = Qe_3$?
5. Quelle est la matrice de f dans la base $\{q_1, q_2, q_3\}$?

1) structure euclidienne = produit scalaire

- symétrique - $f(u,v) = f(v,u)$
- définie : $f(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$

soit $(x_1 - 2x_2)(x_1 - 2x_2) + x_2 \cdot x_2 + (x_2 + x_3)(x_2 + x_3) = 0$

alors $(x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

- positive : évident - $f(u,u) \geq 0\ \forall u$ car f est une somme de carrés.

2) La matrice de produit scalaire est donné par la matrice A telle que

$f(u,v) = {}^t u A v$ avec $a_{ij} = f(e_i, e_j)$

$$f(u,v) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

3) $\tilde{q}_1 = e_1 \Rightarrow q_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, $\|e_1\| = \sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle} = \sqrt{1} \Rightarrow q_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\tilde{q}_2 = e_2 - f(q_1, e_1)\, q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$$\left\|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{f\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)} = \sqrt{(2-2\cdot 1)^2+1^2+(1+0)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tilde{q}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - 0 - 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1\end{pmatrix}\right) = \left(-1-2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}+1\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$q_3 = \frac{\tilde{q}_3}{\|\tilde{q}_3\|} = \frac{\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{1/2}} = \boxed{\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}}$$

4. La matrice de changement de base

$$P = \begin{bmatrix}1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix}1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\right)$$

5. La matrice de f dans la base $\{q_1, q_2, q_3\}$ est $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ car elle est orthonormée!

Exercice 2. Cauchy-Schwarz

1. Quelle est l'expression $N(x,y)$ dans l'enoncé suivant du théorème de Cauchy-Schwarz :

   Soit $(E, <\cdot,\cdot>)$ un espace vectoriel euclidien. Alors pour tout x, y de E on a une inégralité

   $$<x,y> \leq N(x,y).$$

2. Quelle est la condition sur x et y pour que $<x,y>$ soit égale à $N(x,y)$. La démontrer.
3. On veut montrer que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité

   $$\sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos\alpha + \cos\beta \leq 2.$$

   Pour cela peut-on voir la partie gauche comme $<x,y>$ avec $x, y \in \mathbb{R}^3$ judicieusement choisis ? Finir l'argument en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. $N(x,y) = \|x\| \cdot \|y\|$

2. $\langle x,y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$ ssi x et y sont linéairement dépendent (colinéaire)

$\Leftarrow$ si $\exists \lambda$ t.q. $y = \lambda x$

on a $\langle x,y\rangle = \lambda\langle x,x\rangle = \sqrt{\langle x,x\rangle} \cdot \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle}$
$= \|x\| \cdot \|y\|$

$\Rightarrow$ Soit $\langle x,y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow \langle x,y\rangle^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

si on considère un polynôme quadratique en t

$0 \leq \langle tx+y, tx+y\rangle = t^2\langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$

son discriminant $\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

est égale à 0 par $(*)$

Ce qui implique que $\langle tx+y, tx+y\rangle = 0$

a une solution $\Rightarrow \exists t$, t.q. $tx+y=0$

et $y = (-t)\cdot x \Rightarrow$ colinéairité.

3. Si on regarde deux vecteurs

$\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sin\beta \\ 1 \\ \cos\beta \end{pmatrix}$, leur produit scalaire

standard donne $\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha + \cos\beta$

et l'inégalité Cauchy-Schwarz implique

$$\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha + \cos\beta \leq \left\| \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} \sin\beta \\ 1 \\ \cos\beta \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1} \cdot \sqrt{\sin^2\beta + 1 + \cos^2\beta} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Partie B

Exercice 3. Sous-espaces orthogonaux

Soit $E = \mathbb{R}^3$ - l'espace euclidien avec la base canonique (e_1, e_2, e_3). On munit E du produit scalaire standard donné par

$$< X, Y >= {}^tX \cdot Y == x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

où (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) sont les coordonnées des vecteurs X et Y respectivement.
On considère trois vecteurs U, V et W de coordonnées respectives $(1, 2, -2), (1, -1, 4)$ et $(1, 2, 7)$.

1. Soient F le sous-espace engendré par les vecteurs U et V. Trouver une base orthonormée de F dont le premier vecteur est colinéaire à U.
2. En utilisant le vecteur W completer la base orthonormée de F en une base orthonormée de E.
3. Quelle est la projection du vecteur W sur l'espace F ?
4. Quelle est la distance du point $(1, 2, 7)$ au sous-espace F ?
5. Calculer la projection orthogonale des vecteurs de la base canonique sur F. En déduire la matrice A de la projection orthogonale p_F de E sur le sous-espace F dans la base canonique.
6. Quels sont le noyau et l'image de p_F ?
7. Trouver une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de p_F est donnée par une matrice diagonale avec des 1 et 0 sur la diagonale.
8. Quelle est la matrice de passage M de la base canonique à la base $\mathcal{B}$?
9. Montrer que si dans une matrice les vecteurs-colonnes forment une base orthonormale alors c'est la matrice d'un endomorphisme orthogonal.
10. En déduire sans calcul que $M^{-1} = {}^tM$.

1) $\tilde{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\langle \tilde{q}_1, \tilde{q}_1 \rangle = 1^2 + 2^2 + (-2)^2 = 9 \Rightarrow \|\tilde{q}_1\| = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}$

$\tilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}(1 - 2 - 8) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\|q_2\| = \sqrt{4+1+4} = 3$, $q_2 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

2) Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ n'est pas dans F. Completons la base de F à l'aide de ce vecteur.

$\tilde{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}(1 + 4 - 14) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 7) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (*)

$\|\tilde{q}_3\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ alors $q_3 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

3) La décomposition (*) de 2) donne

$$\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} \text{ où } \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \in F^{\perp} \text{ et } \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} \in F, \text{ donc } p_F\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}$$

4) La distance $- \left\|\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2^2+2^2+1} = 3$

5) La matrice A de projection P_F :

$q_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $q_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$e_1 \longmapsto \langle e_1, q_1\rangle q_1 + \langle e_1, q_2\rangle q_2$ – première colonne de A

$e_2 \longmapsto \langle e_2, q_1\rangle q_1 + \langle e_2, q_2\rangle q_2$ – deuxieme colonne de A

$e_3 \longmapsto \langle e_3, q_1\rangle q_1 + \langle e_3, q_3\rangle q_3$ – troisieme colonne de A.

$$e_1 \longmapsto \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1+4\\2+2\\-2+4\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$e_2 \longmapsto \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2+2\\4+1\\-4+2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}$$

$$e_3 \longmapsto -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+4\\-4+2\\4+4\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\8\end{pmatrix}$$

Conclusion:
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\4 & 5 & -2\\2 & -2 & 8\end{pmatrix}$$

6) $\operatorname{Ker} p_F = F^{\perp} = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\operatorname{Im} P_F = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

7) Il suffit de prendre les vecteurs q_1, q_2, q_3 pour que la matrice devient $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

8) La matrice de passage est donnée par la matrice dont les colonnes sont $q_1\ q_2\ q_3$:

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9) Soit C_1, C_2, C_3 - les vecteurs-colonnes forment la base orthonormale

On veut m.q. ${}^tMM = Id$

On remarque que ${}^tM$ a les lignes composée des ${}^tC_i$

On a $\langle C_i, C_j \rangle = {}^tC_i C_j$

et si la base est ortonormée

on a ${}^tC_i C_j = \delta_{ij}$

D'où ${}^tMM = Id$

10) On conclut alors que M ici est orthogonale, c.a.d. ${}^tMM = Id \Rightarrow M^{-1} = {}^tM$