TD/TP 4 - Seconde partie
Calcul du déterminant et de l'inverse d'une matrice

I Déterminant

Q.1) - Expliquer comment est modifié le déterminant lors d'une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice.

Q.2) - En déduire un algorithme utilisant la méthode du pivot de Gauss pour calculer le déterminant.

Q.3) - Quelle est la complexité de cette algorithme ?

II Inversion d'une matrice

Une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ consiste à résoudre le système

$A \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$, c'est-à-dire à calculer une matrice B tel que ce système soit équivalent à

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}. \text{ On a alors } A^{-1} = B.$$

Pour cela, on considère le système sous la forme

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = I_n \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{où } I_n \text{ est la matrice identitée de } GL_n(\mathbb{R})$$

Q.1) - Remarquer qu'une opération élémentaire sur les lignes du système consiste à faire conjointement cette opération élémentaire sur les matrices A et I_n.

Q.2) - Considérons par exemple la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que le système

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ est équivalent à un système de la forme}$$

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ que l'on déterminera.}$$

Q.3) - Quel algorithme avez-vous utilisé ? Quelle est sa complexité ?

Q.4) - Transformer maintenant le système obtenu en un système équivalent de la forme

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b''_{11} & b''_{12} & b''_{13} \\ b''_{21} & b''_{22} & b''_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Q.5) - Terminer par un système équivalent de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Q.6) - Conclure.

Q.7) - Quelle est la complexité de cet algorithme d'inversion ?

III EN TP

Le but de ce TP est d'implémenter les calculs du déterminant et de l'inverse d'une matrice.

Q.1) - Compléter la classe **`Matrice`** par une méthode retournant le déterminant. Si la matrice n'est pas carrée, cette méthode générera une exception.

Q.2) - Écrire une méthode statique qui retourne la matrice identité de taille n donnée en argument.

Q.3) - Écrire une méthode qui retourne l'inverse de la matrice. Cette méthode générera une exception si la matrice n'est pas carrée ou si la matrice n'est pas inversible.

IV Facultatif

Q.1) - Vérifier que la solution d'un système de Cramer à coefficients entiers est à valeurs rationnelles.

Q.2) - Écrire une classe **`MatriceRationnelle`** qui donne les solutions exactes d'un système de Cramer à coefficients entiers et qui calcule de manière exacte l'inverse d'une matrice à coefficients rationnels.