Algorithmes en Java
Chap. 5 : Graphes

Fabien et Agnès Rico agnes.rico@univ-lyon1.fr

Université Claude Bernard Lyon 1

11 novembre 2013

Quelques définitions

Définition (Graphe)

Soit X un ensemble fini.
Un graphe est un couple (X, U) où X est un ensemble et U est l'ensemble de couples (x, y) de X.

- Les éléments de X : sommets du graphe
- Les éléments de U : arcs du graphe

$NS = card(X)$ nombre de sommets, $NA = card(U)$ nombre d'arcs.

Exemple

$(4, 2), (5, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$

Quelques définitions

Définition (Graphe)

Soit X un ensemble fini.
Un graphe est un couple (X, U) où X est un ensemble et U est l'ensemble de couples (x, y) de X.

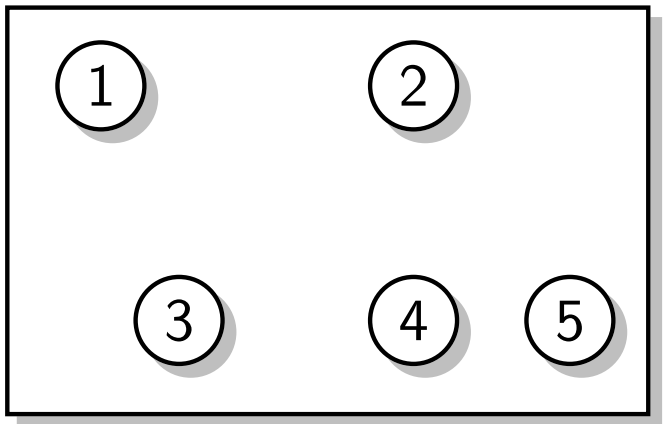
- Les éléments de X : sommets du graphe
- Les éléments de U : arcs du graphe

$NS = card(X)$ nombre de sommets, $NA = card(U)$ nombre d'arcs.

Exemple

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(4, 2), (5, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$$



Quelques définitions

Définition (Graphe)

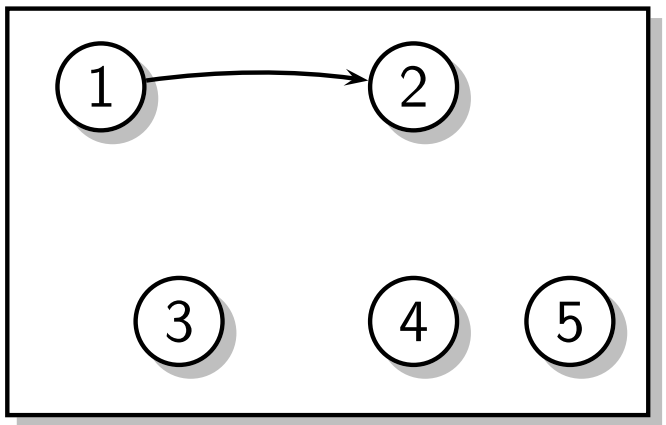
Soit X un ensemble fini.
Un graphe est un couple (X, U) où X est un ensemble et U est l'ensemble de couples (x, y) de X.

- Les éléments de X : sommets du graphe
- Les éléments de U : arcs du graphe

$NS = card(X)$ nombre de sommets, $NA = card(U)$ nombre d'arcs.

Exemple

$$\begin{aligned} X &= \{1,2,3,4,5\} \\ U &= \{(1,2),(2,1),(3,2), \\ &\quad (4,2),(5,2),(3,3),(3,4),(4,3)\} \end{aligned}$$



Quelques définitions

Définition (Graphe)

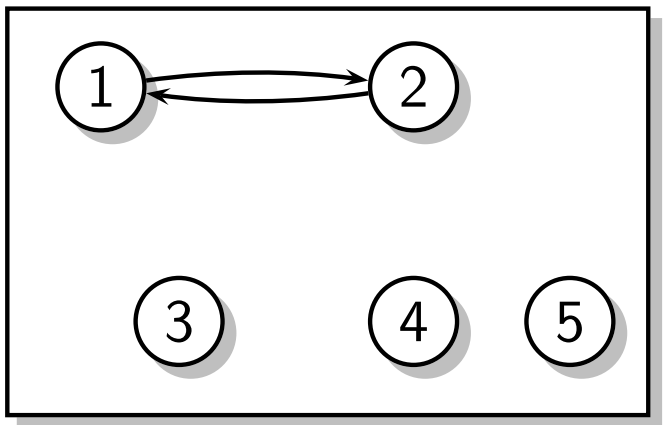
Soit X un ensemble fini.
Un graphe est un couple (X, U) où X est un ensemble et U est l'ensemble de couples (x, y) de X.

- Les éléments de X : sommets du graphe
- Les éléments de U : arcs du graphe

$NS = card(X)$ nombre de sommets, $NA = card(U)$ nombre d'arcs.

Exemple

$$\begin{aligned} X &= \{1,2,3,4,5\} \\ U &= \{(1,2),(2,1),(3,2), \\ &\quad (4,2),(5,2),(3,3),(3,4),(4,3)\} \end{aligned}$$



Quelques définitions

Définition (Graphe)

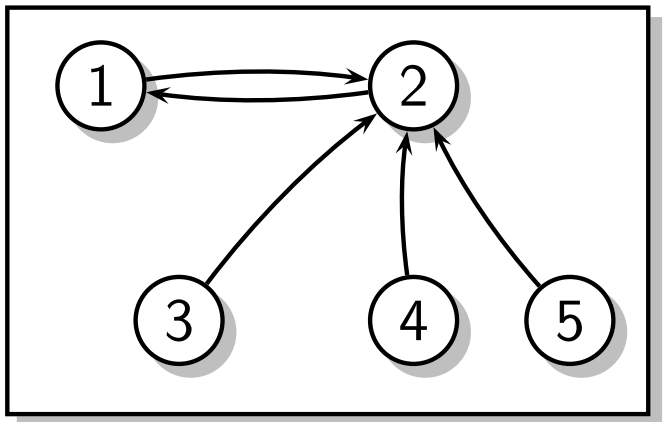
Soit X un ensemble fini.
Un graphe est un couple (X, U) où X est un ensemble et U est l'ensemble de couples (x, y) de X.

- Les éléments de X : sommets du graphe
- Les éléments de U : arcs du graphe

$NS = card(X)$ nombre de sommets, $NA = card(U)$ nombre d'arcs.

Exemple

$$\begin{aligned} X &= \{1,2,3,4,5\} \\ U &= \{(1,2),(2,1),(3,2), \\ &\quad (4,2),(5,2),(3,3),(3,4),(4,3)\} \end{aligned}$$



Quelques définitions

Définition (Graphe)

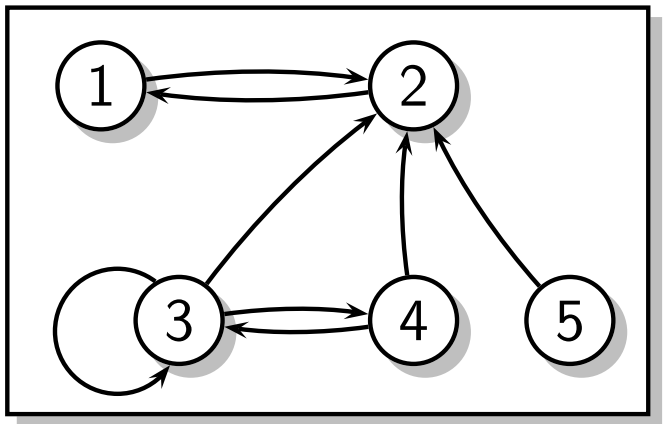
Soit X un ensemble fini.
Un graphe est un couple (X, U) où X est un ensemble et U est l'ensemble de couples (x, y) de X.

- Les éléments de X : sommets du graphe
- Les éléments de U : arcs du graphe

$NS = card(X)$ nombre de sommets, $NA = card(U)$ nombre d'arcs.

Exemple

$$\begin{aligned} X &= \{1,2,3,4,5\} \\ U &= \{(1,2),(2,1),(3,2), \\ &\quad (4,2),(5,2),(3,3),(3,4),(4,3)\} \end{aligned}$$



Quelques définitions

Définition (Successeurs)

$\mathcal{P}(X)$ ensemble des parties de X

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : X & \to & \mathcal{P}(X) \\ x & \mapsto & \Gamma(X) = \{y \in X; (x,y) \in U\} \end{array}$$

Associe à chaque sommet l'ensemble de ses successeurs. Un graphe peut être noté (X, Γ).

Exemple

$\Gamma(1) = \{2\}$, $\Gamma(2) = \{1\}$, $\Gamma(3) = \{2,3,4\}$, $\Gamma(4) = \{2,3\}$, $\Gamma(5) = \{2\}$.

Orienté

Définition (Orienté/Non orienté)

Les arcs peuvent avoir un sens ou non, on dit alors que les graphes sont *orientés* ou *non orientés*

Dans un graphe orienté, soit un arc (i, j) :

- i : origine
- j : extrémité

Dans un graphe non orienté on ne distingue pas l'origine de l'extrémité d'un arc. On parle *d'arête*.

Dans la suite du cours les graphes sont orientés.

Graphe partiel

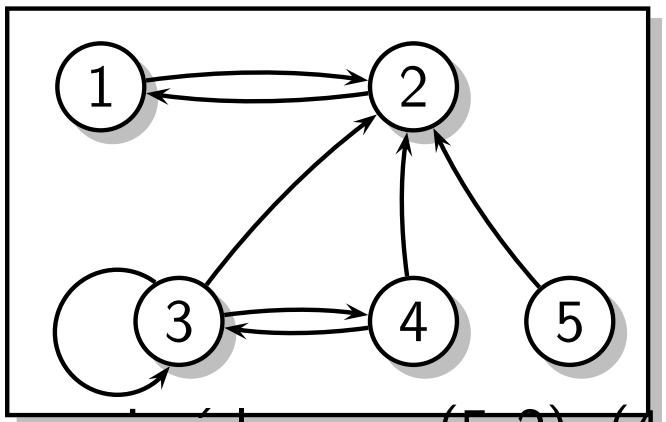
On peut supprimer des arcs d'un graphes

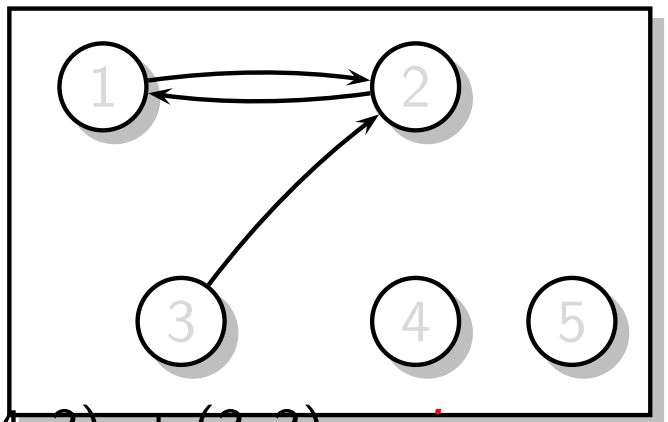
Définition (Graphe partiel)

$G_1 = [X_1, U_1]$ est un graphe partiel de $G = [X, U]$ ssi

$$\begin{aligned} X_1 &= X \\ U_1 &\subset U. \end{aligned}$$

Exemple





On a supprimé les arcs $(5,2)$, $(4,2)$, $(3,4)$, $(4,3)$ et $(3,3)$ *mais* on a conservé les sommets 4 et 5.

Graphe partiel

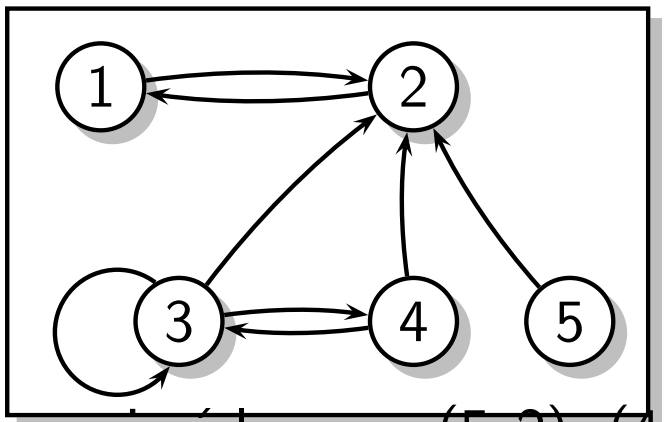
On peut supprimer des arcs d'un graphes

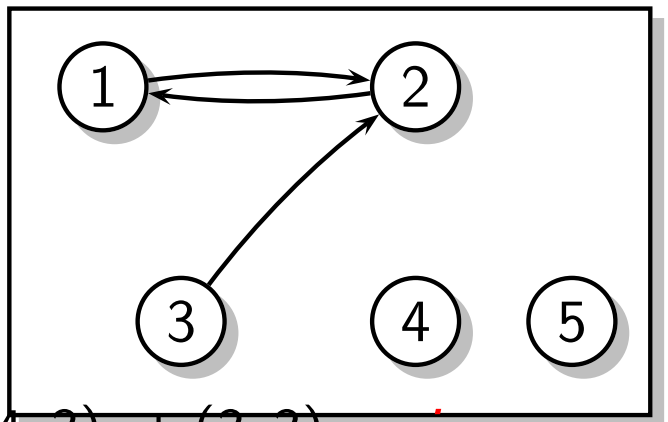
Définition (Graphe partiel)

$G_1 = [X_1, U_1]$ est un graphe partiel de $G = [X, U]$ ssi

$$\begin{aligned} X_1 &= X \\ U_1 &\subset U. \end{aligned}$$

Exemple





On a supprimé les arcs $(5,2)$, $(4,2)$, $(3,4)$, $(4,3)$ et $(3,3)$ *mais* on a conservé les sommets 4 et 5.

Sous-graphe

On peut aussi supprimer les sommets

Définition (Sous graphe)

$G_2 = [X_2, U_2]$ est un *sous-graphe* de $G = [X, U]$ ssi

- $X_2 \subset X$ on enlève des sommets ;
- $U_2 \subset U \cap (X_2 \times X_2)$ on enlève des arrêtes dont toutes les arrêtes impossibles.

Définition (Sous graphe induit)

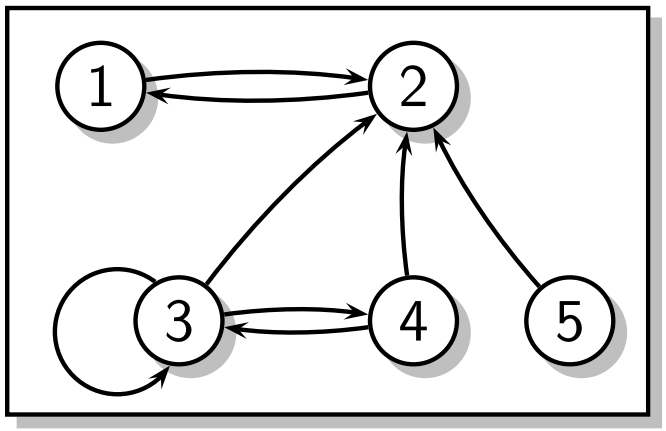
On dit que le sous graphe est *induit* lorsque seules les arrêtes impossibles sont supprimées

$G_2 = [X_2, U_2]$ est un sous-graphe induit de $G = [X, U]$ ssi

- $X_2 \subset X$;
- $U_2 = U \cap (X_2 \times X_2)$.

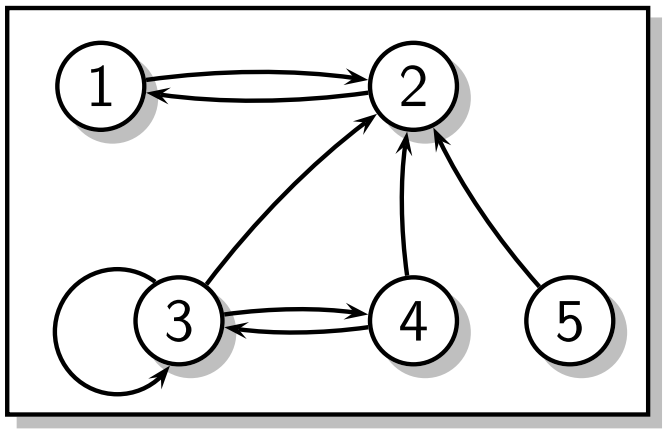
Exemple de sous graphe induit

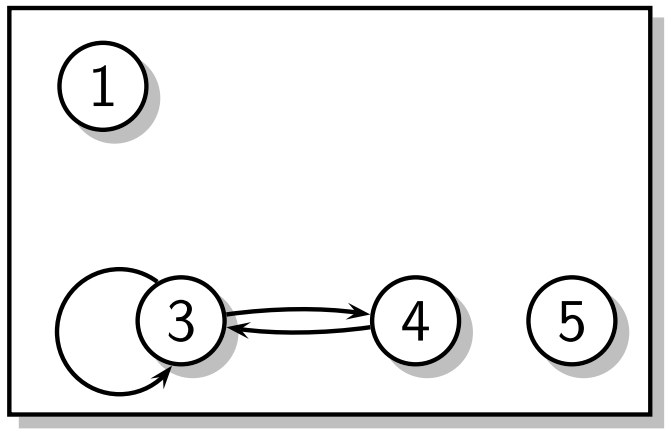
Exemple Si on supprime le sommet 2 il faut au moins supprimer les arcs $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,2)$ et $(5,2)$.



Exemple de sous graphe induit

Exemple Si on supprime le sommet 2 il faut au moins supprimer les arcs $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,2)$ et $(5,2)$.





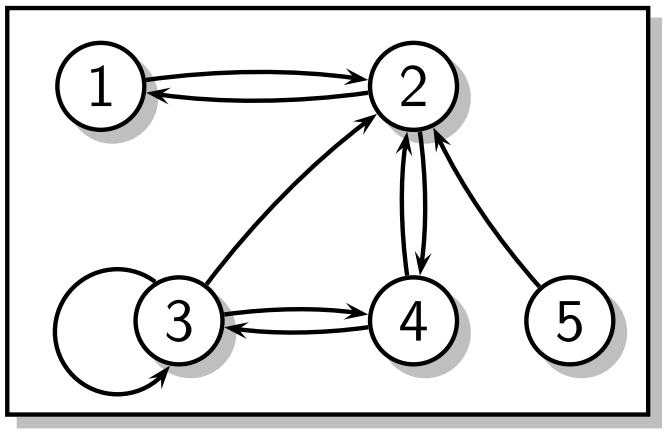
Chemin

Définition (Chemin)

Un chemin est une suite finie de sommets $(x_1, \cdots, x_p)$ et telle que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\} : (x_i, x_{i+1}) \in U$.
Dans un chemin,

- x_1 est le sommet de départ,
- x_p est le sommet d'arrivée.

Exemple

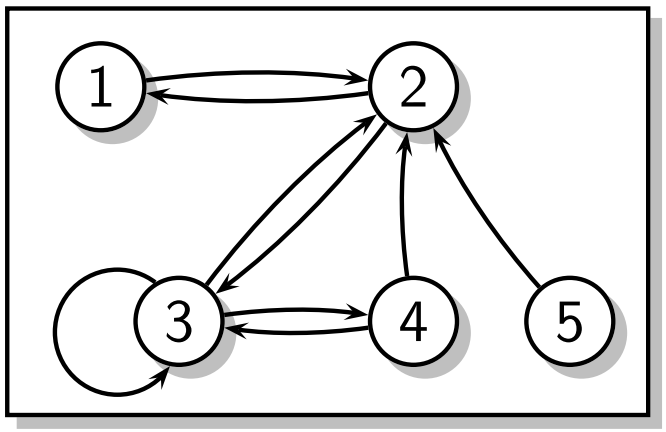


- $(1, 2, 4)$ est un chemin de 1 vers 4 ;
- $(2, 4, 5)$ n'est pas un chemin car $(4, 5)$ n'existe pas ;
- $(3, 4, 2)$ est un chemin de 3 vers 2 ;
- $(3, 4, 2, 1, 2)$ est aussi un chemin de 3 vers 2.

Chemin (suite)

Définition

- Un circuit est un chemin pour lequel le sommet de départ est égal au sommet d'arrivée.
- Un chemin est simple s'il passe une seule fois par les arcs qui le composent.
- Un chemin est élémentaire s'il passe une seule fois par les sommets qui les composent.



- $(1, 2, 1)$ et $(3, 4, 3, 3)$ sont des circuits ;
- $(1, 2, 1, 2, 3)$ est un chemin non simple (composé) ;
- $(1, 2, 3)$ chemin simple et élémentaire ;
- $(1, 2, 1, 2, 3)$ n'est pas élémentaire ;
- $(1, 2, 1)$ est un circuit non élémentaire.

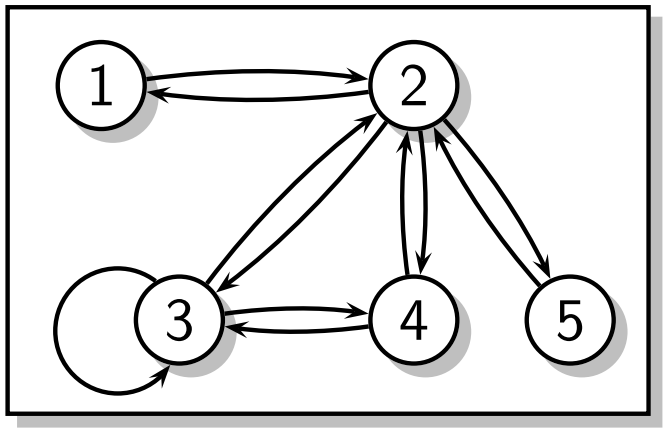
Symétrie

Définition (Symétrie)

Un graphe $[X, U]$ est symétrique si pour tout couple (x, y) de sommets, $(x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \in U$. C'est à dire :

- ou bien $(x, y) \notin U$
- ou bien $(x, y) \in U$ et $(y, x) \in U$

Exemple

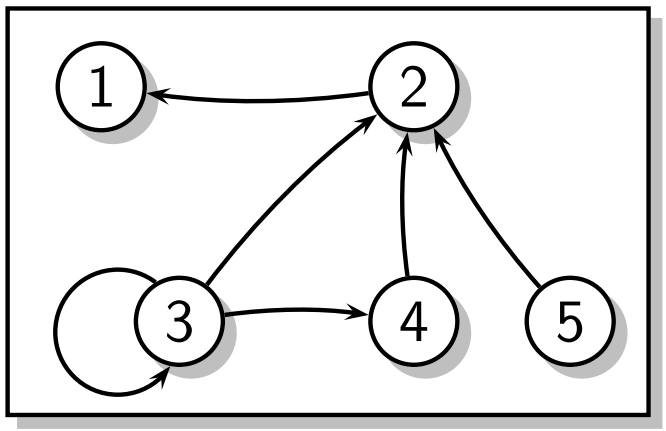


Définition (anti-symétrie)

Un graphe est anti-symétrique si pour tout couple (x, y), $(x, y) \in U et (y, x) \in U \Rightarrow x = y$. C'est à dire lorsque $x \neq y$:

- ou bien $(x, y) \notin U$
- ou bien $(y, x) \notin U$

Exemple



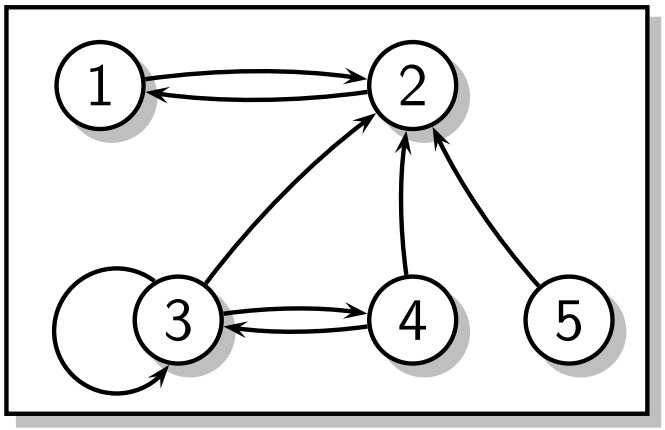
Complétude

Définition

Un graphe est complet si pour tout couple de sommets (x, y) soit $(x, y) \in U$ soit $(y, x) \in U$.

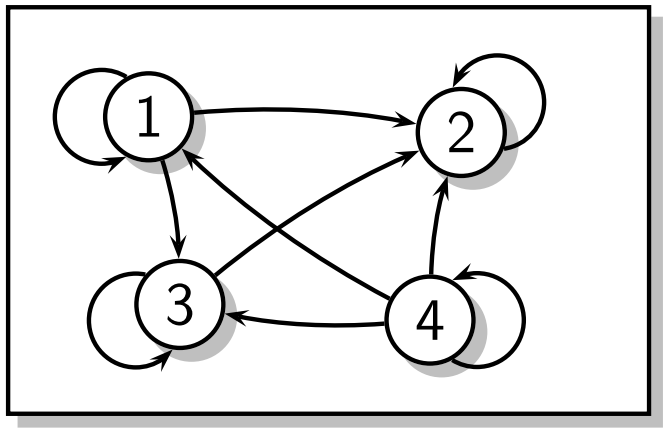
Exemple

Un graphe non complet :



Le graphe n'est pas complet car $(4, 5) \notin U$ et $(5, 4) \notin U$.

Un graphe complet :



Introduction

Le choix de la représentation d'un graphe

- est importante car elle agit sur la complexité ;
- dépend des opérations qui seront effectuées sur le graphe :
  - il n'y a pas de meilleur représentation ;
  - il n'y a pas de représentation passe partout.

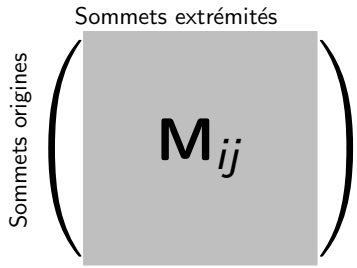
Il faut donc se demander :

- Le nombre de sommets est-il important ?
- Devra-t-on chercher souvent les successeurs d'un sommet ?
- Devra t-on souvent chercher les prédécesseurs d'un sommet ?
- Devra t-on souvent ajouter ou supprimer des arcs ?
- Devra t-on souvent ajouter ou supprimer des sommets ?

La *représentation graphique* n'est utilisable qu'en cours pour tester les exemples.

Représentation matricielle

On représente le graphe par une matrice d'incidence sommet-sommet.

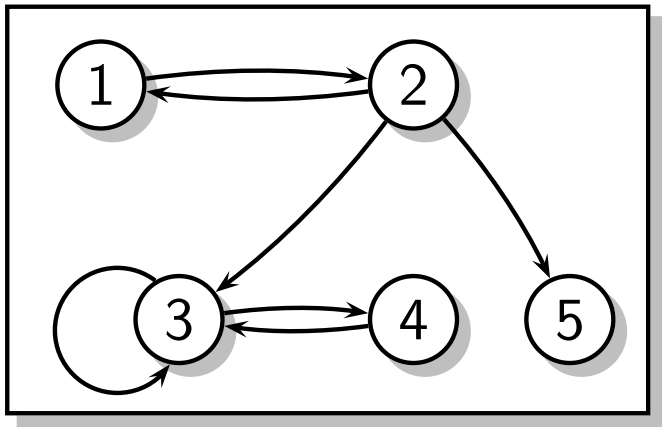


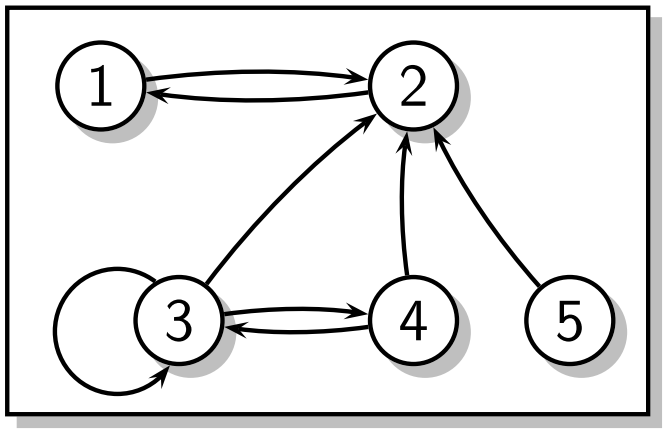
On utilise une matrice de dimension (NS, NS) où NS est le nombre de sommets $M = (M_{ij})_{1 \leq i,j \leq NS}$

$$M_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } (i,j) \notin U \\ 1 \text{ si } (i,j) \in U \end{cases}$$

On peut aussi utiliser une matrice de booléens.

Exemple





	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Performance de la représentation matricielle

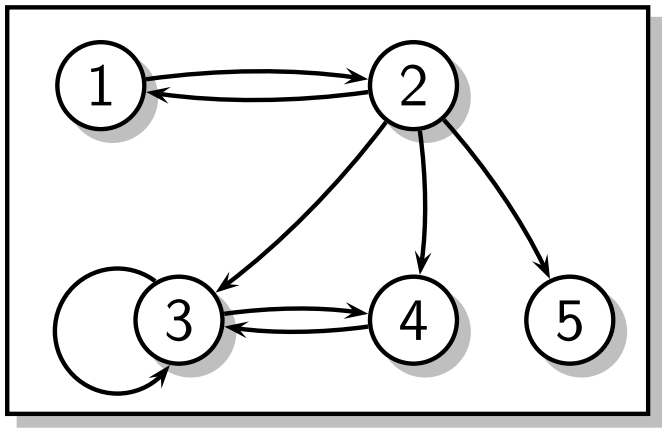
En temps

- Si on cherche les successeurs d'un sommet i on doit parcourir la ligne du sommet i et chercher les cases contenant un 1
  $\Rightarrow$ `for(int j=0;j<NS;j++)`
  $\Rightarrow O(NS)$.
- Si on cherche les prédécesseurs d'un sommet j on doit parcourir la colonne du sommet j et chercher les cases contenant un 1
  $\Rightarrow$ `for(int i=0;i<NS;i++)`
  $\Rightarrow O(NS)$.
- Si on cherche l'existence d'un arc (i, j) On se place directement en M_{ij}. $\Rightarrow O(1)$: une constante, ne dépend pas de la taille du tableau.

Représentation sous forme d'un dictionnaire

On utilise un tableau : la i^e ligne contient les successeurs du i^e sommet.

Exemple



x	$\Gamma(x)$
1	2
2	1 3 4 5
3	3 4
4	3
5	

Performances du dictionnaire

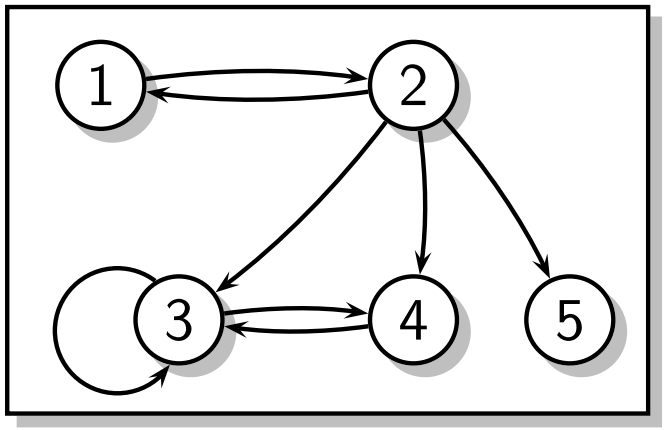
Temps

- On a directement accès aux successeurs d'un sommet i : si le tableau s'appelle `t`, `t[i]` est la liste des successeurs du i^{e} sommet.
  $\Rightarrow O(1)$.
- Si on cherche les prédécesseurs d'un sommet j, on doit utiliser le dictionnaire du graphe inverse ou parcourir tous les arcs.
  $\Rightarrow O(NA)$ (NA est le nombre d'arêtes).
- Si on veut savoir si un arc (i, j) existe on doit parcourir le tableau $t[i]$. Dans le pire des cas tous les sommets sont successeurs de i
  $\Rightarrow O(NS)$.

Représentation par vecteurs d'extrémités

On utilise deux tableaux un pour les origines et l'autre pour les extrémités.
C'est à dire qu'on stocke une liste des arcs.
On utilise 2 tableaux de taille *NA* le nombre d'arc.

Exemple



orig	2	2	1	2	2	4	3	3
extr	1	3	2	4	5	3	4	3

Performances des vecteurs d'extrémités

En temps :

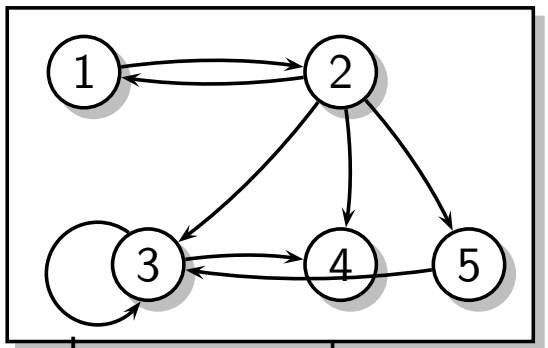
- Si on veut connaître les successeurs d'un sommet i, il faut parcourir le tableau origines et récupérer les extrémités correspondantes.
  $\Rightarrow O(NA)$
- Si on veut connaître les prédécesseurs d'un sommet i, il faut parcourir le tableau extrémités et récupérer les origines correspondantes.
  $\Rightarrow O(NA)$
- Pour savoir si un arc (i, j) existe, il faut parcourir le tableau origine et récupérer l'extrémité correspondante.
  $\Rightarrow O(NA)$

Représentation par origine

Pour améliorer la version précédente, il est possible d'ordonner l'une des listes par exemple celle des origines. Ainsi, il devient possible de maintenir un tableau qui signale le début et la fin de la liste des successeurs de chaque origine.
Il faut 3 tableaux :

- un tableau (TOrig) de taille NA des origines de chaque arc (classé par origine croissante) ;
- un tableau (TExtr) de taille NA des extrémités de chaque arc (correspondant au précédant) ;
- Un tableau (TDeb) de taille $NS + 1$ qui signale le début et la fin de chaque série dans le premier.

Exemple



Sommets	1	2	3	4	5	*F*		
TDeb	1	2	6	8	8	9		
TOrig	1	2	2	2	2	3	3	5
TExtr	2	1	3	4	5	3	4	3

Tous les arcs ayant pour sommets origine i sont entre les cases $TDeb[i]$ et $TDeb[i+1]$.

Performance de la représentation par origine

En temps :

- On a directement accès aux successeurs d'un sommet i.
  $\Rightarrow O(1)$.
- Si on cherche les prédécesseurs d'un sommet j, on doit parcourir tous les arcs.
  $\Rightarrow O(NA)$.
- Si on veut savoir si un arc (i, j) existe on doit parcourir le tableau $t[i]$.
  Dans le pire des cas tous les sommets sont successeurs de i
  $\Rightarrow O(NS)$.

Parcours de graphes

Soit un graphe $G = [X, U]$
on veut parcourir tous les sommets du graphe pour leur appliquer un traitement.

- *Exploration en profondeur* :
  Cette méthode consiste à suivre un chemin le plus loin possible et à revenir en arrière pour explorer les sommets précédemment ignorés.
- *Exploration en largeur* :
  On explore en priorité les successeurs d'un sommet

? Si le graphe contient des cycles, que peut-il se passer ?

Méthode

Quelle que soit la façon de parcourir le graphe il faut 2 structures de données :

- Une structure permettant de connaître les sommets déjà explorés :
  - pour ne pas visiter 2 fois un sommet (p. ex si on compte les sommets) ;
  - pour faire des opérations différentes (p. ex si on cherche un plus court chemin).
- Une structure stockant les sommets à explorer :
  - à chaque fois qu'on passe par un sommet il faut ajouter ses successeurs dans cette structure
  - il est important de conserver l'ordre voulu.

Marquage des sommets explorés

Tableau de marque

Pour se souvenir des sommets déjà visités, il est possible d'utiliser un tableau de booléens marque :

$$marque[i] = \begin{cases} \text{true si on a déjà visité le sommet} \\ \text{false si on n'a pas encore visité le sommet} \end{cases}$$

On utilisera de plus les méthodes suivantes :

- TableauBooleen initMarques() crée le tableau et l'initialise à false .
- TableauBooleen.marquer(Sommet s) marque un sommet à true.
- booleen TableauBooleen.estMarque(Sommet s) retourne la marque du sommet.

Stockage des sommets à explorer

Sommets à explorer

Pour stocker les sommets à explorer, il faut une structure dépendant de l'ordre d'exploration `avisiter` :

- lorsqu'on explore en profondeur le prochain sommet doit être l'un des successeurs du sommet courant *donc l'un de ceux qu'on vient d'ajouter* ;
- lorsqu'on explore en largeur, le prochain sommet doit être à même distance du départ que le sommet courant *donc c'est le premier sommet ajouté parmi ceux qu'on n'a pas encore visité*.

Il faut de plus les méthodes suivantes :

- `StructAVisiter initAVisiter ()` crée la structure vide .
- `booleen StructAVisiter .estVide()` permet de savoir si elle est vide (pour stopper l'algorithme).
- `Sommet StructAVisiter.prochain()` donne le prochain sommet à visiter.
- `StructAVisiter .enleveProchain()` supprime le prochain sommet à visiter.
- `StructAVisiter .ajoute(Sommet s)` ajoute un sommet à la structure.

Algorithme

Données : deb : le point de départ,

marque : le tableau des marques

début

```
avisiter ← initAVisiter()
avisiter.ajoute(deb)
tant que avisiter.estVide() = false faire
    s = avisiter.prochain()                    // prochain sommet à visiter
    avisiter.enleveProchain()                  // on le retire de la liste
    si marque.estMarque(s) alors
        // on est déjà passé là
        ... on fait les opérations prévues
    sinon
        // on n'est jamais passé là
        ... on fait les opérations prévues
        marque.marquer(s)                      // il faut marquer s
        pour chaque t successeur de s faire
            avisiter.ajoute(t)                 // il faut visiter ses successeurs
```

fin

Algorithme 1 : ParcoursGeneral(Somment deb, TableauBooleen marque)

Parcours de l'ensemble du graphe

Cet algorithme ne permet de visiter que les noeuds accessibles depuis le point de départ. Pour parcourir le graphe il faut appeler ParcoursGeneral tant qu'il reste au moins un sommet s non marqué.

Données : $G = [X, U]$: le graphe

début

```
    marque ← initMarques()
    pour s ∈ X faire
        si marque.estMarque(s) = FAUX alors
            ParcoursGeneral(s, marque)
```

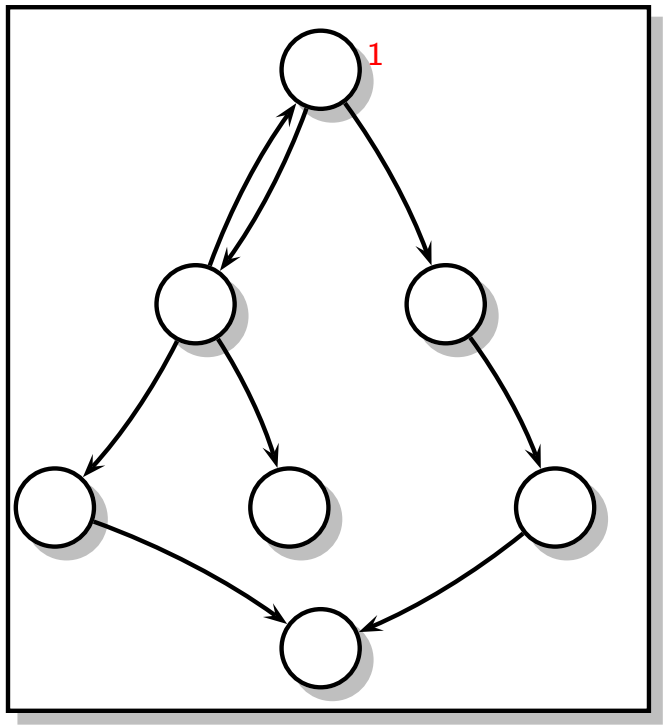
fin

Algorithme 2 : ParcoursTotal(Graphe G)

Parcours en largeur

Pour le parcours en largeur, il faut visiter

- les successeurs du points de départ les uns après les autres ;
- ensuite les successeurs de ces points ;
- ...



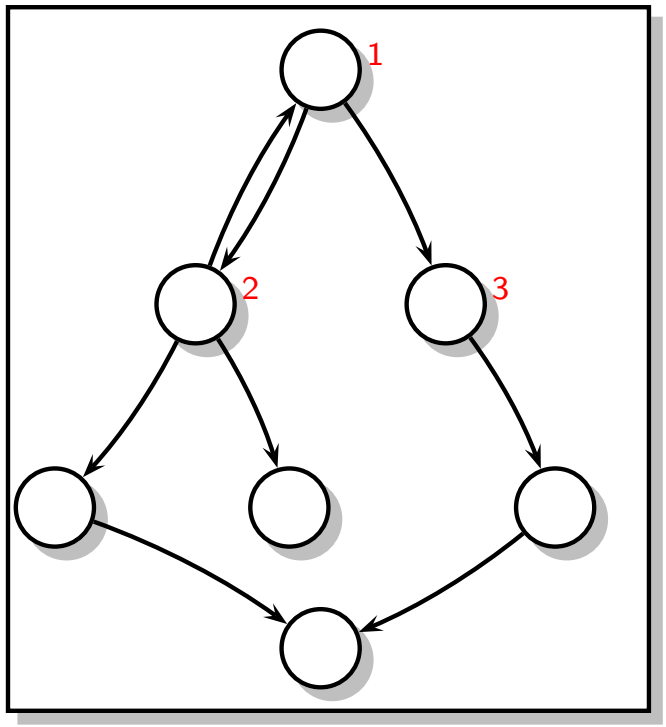
$\Rightarrow$ Il faut visiter les points dans l'ordre dans lequel on les a ajoutés à la liste des points à visiter.

$\Rightarrow$ On utilise une file (premier arrivé premier servi)

Parcours en largeur

Pour le parcours en largeur, il faut visiter

- les successeurs du points de départ les uns après les autres ;
- ensuite les successeurs de ces points ;
- ...



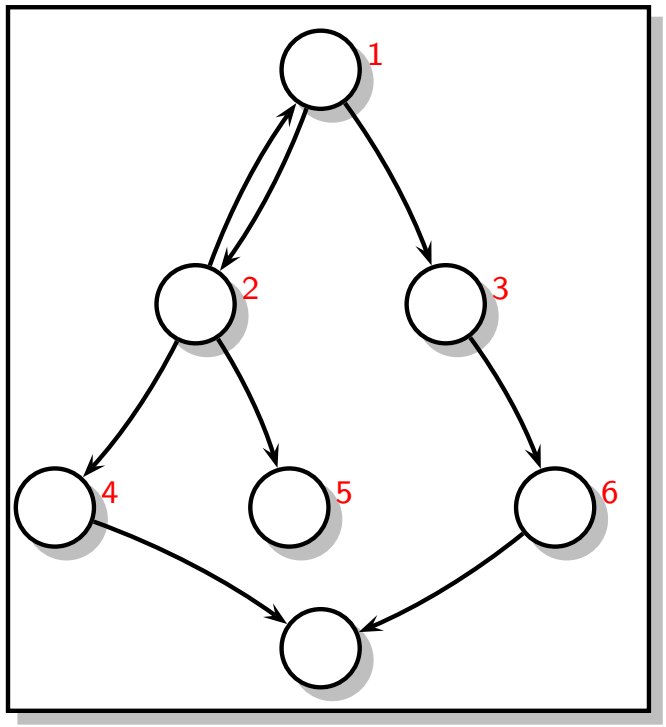
$\Rightarrow$ Il faut visiter les points dans l'ordre dans lequel on les a ajoutés à la liste des points à visiter.

$\Rightarrow$ On utilise une file (premier arrivé premier servi)

Parcours en largeur

Pour le parcours en largeur, il faut visiter

- les successeurs du points de départ les uns après les autres ;
- ensuite les successeurs de ces points ;
- . . .



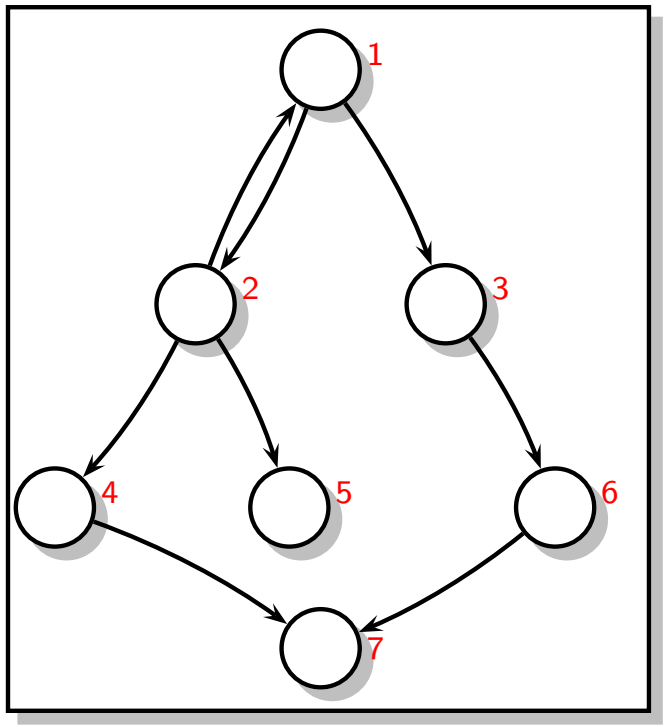
⇒ Il faut visiter les points dans l'ordre dans lequel on les a ajoutés à la liste des points à visiter.

⇒ On utilise une file (premier arrivé premier servi)

Parcours en largeur

Pour le parcours en largeur, il faut visiter

- les successeurs du points de départ les uns après les autres ;
- ensuite les successeurs de ces points ;
- ...



⇒ Il faut visiter les points dans l'ordre dans lequel on les a ajoutés à la liste des points à visiter.

⇒ On utilise une file (premier arrivé premier servi)

Algorithme

Données : deb : le point de départ marque : le tableau des marques

```
début
    file ← initFile()
    file.ajouteALaFin(deb)
    tant que file.estVide() = false faire
        s = file.premier()                          // prochain sommet à visiter
        file.enlevePremier()                        // on le retire de la liste
        si marque.estMarque(s) alors
            // on est déjà passé là
            ... on fait les opérations prévues
        sinon
            // on n'est jamais passé là
            ... on fait les opérations prévues
            marque.marquer(s)                       // il faut marquer s
            pour chaque t successeur de s faire
                file.ajouteALaFin(t)                // il faut visiter ses successeurs
fin
```

Algorithme 3 : ParcoursLargeur(Sommet deb, TableauBooleen marque)

Parcours de l'ensemble du graphe (Rappel)

Pour visiter l'ensemble du graphe

Données : $G = [X, U]$: le graphe

début

```
marque ← initMarques()
pour s ∈ X faire
    si marque.estMarque(s) = FAUX alors
        Parcours...(s, marque)
```

fin

Algorithme 4 : ParcoursTotal(Graphe G)

Étude de la complexité

Si on ne considère que les actions nécessaires pour le parcours :

- On passe par chaque sommet une fois par arc dont il est l'origine $\Rightarrow O(NA)$ passages.
- Une seule fois par sommet, on parcourt les successeurs qu'on ajoute à la liste $\Rightarrow O(NS)$ parcours des successeurs.

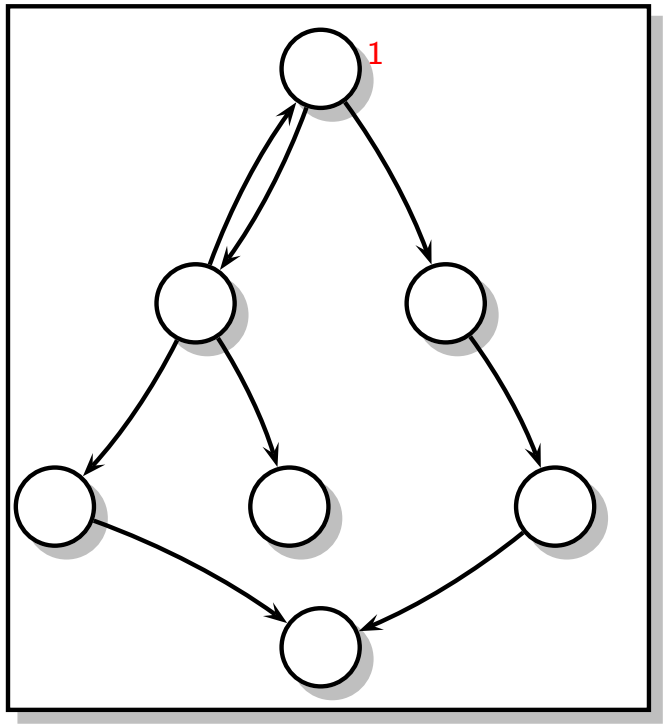
La complexité du parcours des successeurs dépend de la représentation :

- représentation matrice incidence
  - explorer les successeurs $O(NS) \Rightarrow NS \times NS \Rightarrow O(NS^2)$.
  - en tout : $O(NA) + 0(NS^2)$ opérations.
- Représentation dictionnaire
  - pour chaque sommet on parcourt ses successeurs uniquement donc en tout on parcourt $\sum_{s \in X} \#(\Gamma(s)) = O(NA)$ successeurs.
  - en totalité, $O(NA)$ opérations.

Parcours en profondeur

Pour le parcours en profondeur, il faut visiter

- un des successeurs du points de départ ;
- puis un successeurs de ce dernier ;
- ...
- on ne revient en arrière que lorsqu'il n'y a pas de successeur ;
- ...



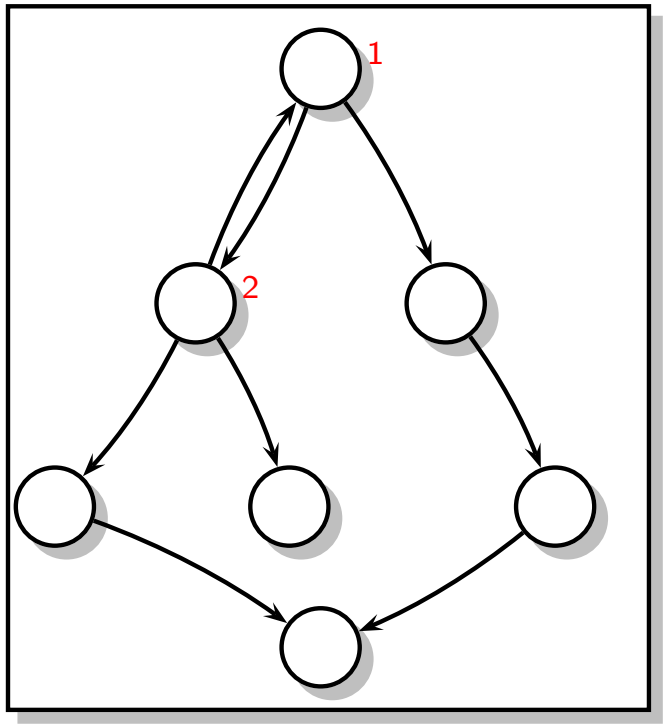
$\Rightarrow$ Il faut visiter en premier les derniers points ajoutés.

$\Rightarrow$ On utilise une pile (dernier arrivé premier servi)

Parcours en profondeur

Pour le parcours en profondeur, il faut visiter

- un des successeurs du points de départ ;
- puis un successeurs de ce dernier ;
- ...
- on ne revient en arrière que lorsqu'il n'y a pas de successeur ;
- ...



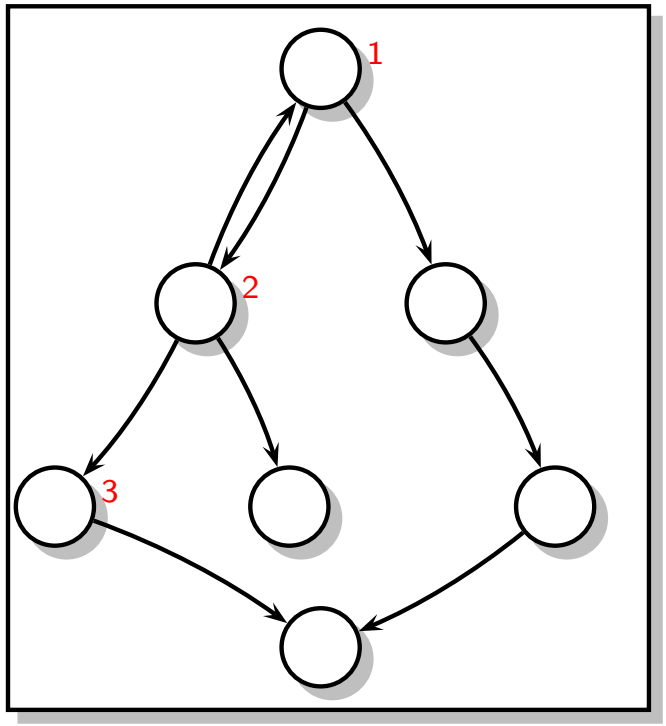
$\Rightarrow$ Il faut visiter en premier les derniers points ajoutés.

$\Rightarrow$ On utilise une pile (dernier arrivé premier servi)

Parcours en profondeur

Pour le parcours en profondeur, il faut visiter

- un des successeurs du points de départ ;
- puis un successeurs de ce dernier ;
- ...
- on ne revient en arrière que lorsqu'il n'y a pas de successeur ;
- ...



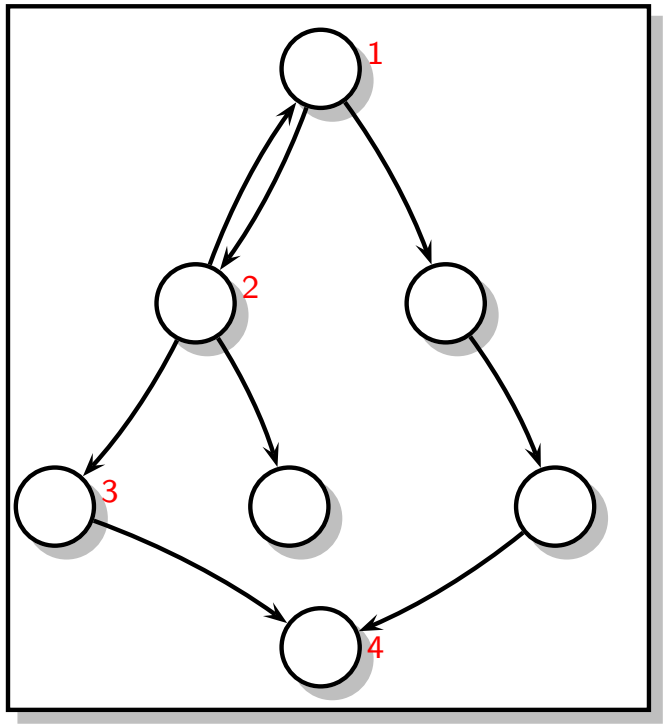
$\Rightarrow$ Il faut visiter en premier les derniers points ajoutés.

$\Rightarrow$ On utilise une pile (dernier arrivé premier servi)

Parcours en profondeur

Pour le parcours en profondeur, il faut visiter

- un des successeurs du points de départ ;
- puis un successeurs de ce dernier ;
- ...
- on ne revient en arrière que lorsqu'il n'y a pas de successeur ;
- ...



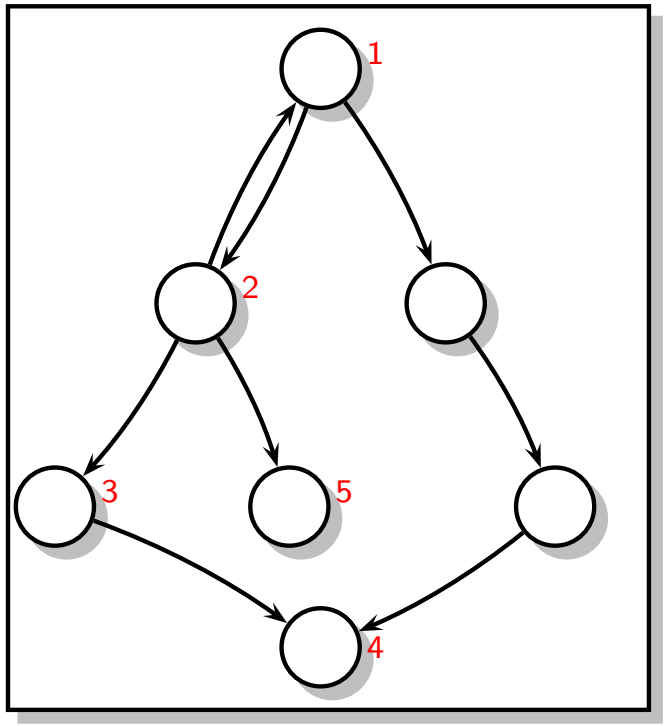
$\Rightarrow$ Il faut visiter en premier les derniers points ajoutés.

$\Rightarrow$ On utilise une pile (dernier arrivé premier servi)

Parcours en profondeur

Pour le parcours en profondeur, il faut visiter

- un des successeurs du points de départ ;
- puis un successeurs de ce dernier ;
- ...
- on ne revient en arrière que lorsqu'il n'y a pas de successeur ;
- ...



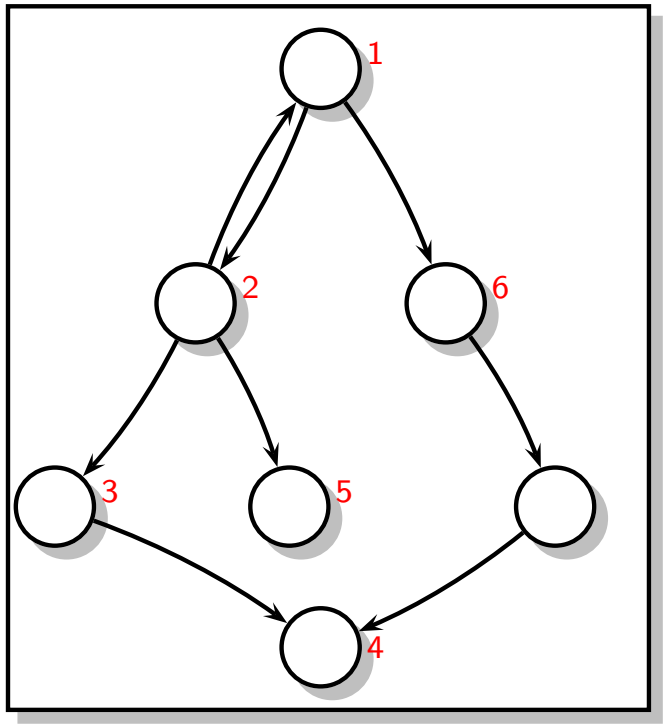
$\Rightarrow$ Il faut visiter en premier les derniers points ajoutés.

$\Rightarrow$ On utilise une pile (dernier arrivé premier servi)

Parcours en profondeur

Pour le parcours en profondeur, il faut visiter

- un des successeurs du points de départ ;
- puis un successeurs de ce dernier ;
- ...
- on ne revient en arrière que lorsqu'il n'y a pas de successeur ;
- ...



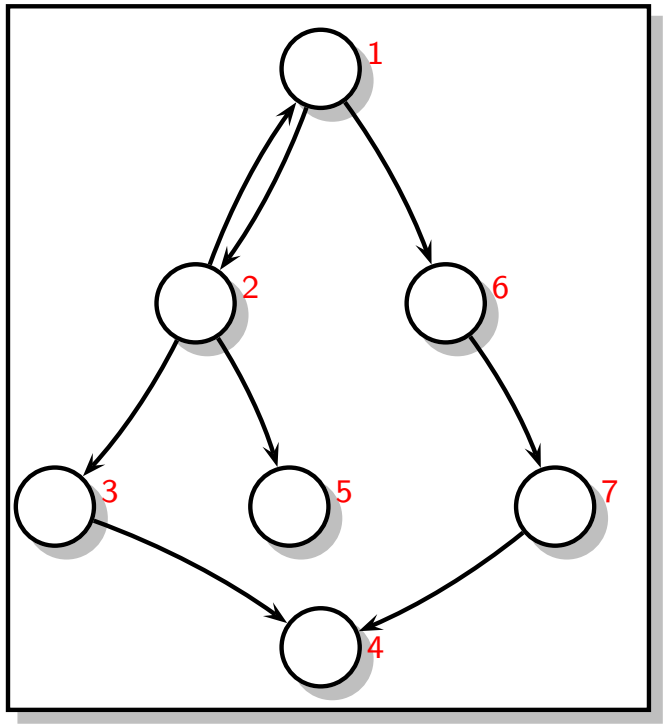
$\Rightarrow$ Il faut visiter en premier les derniers points ajoutés.

$\Rightarrow$ On utilise une pile (dernier arrivé premier servi)

Parcours en profondeur

Pour le parcours en profondeur, il faut visiter

- un des successeurs du points de départ ;
- puis un successeurs de ce dernier ;
- ...
- on ne revient en arrière que lorsqu'il n'y a pas de successeur ;
- ...



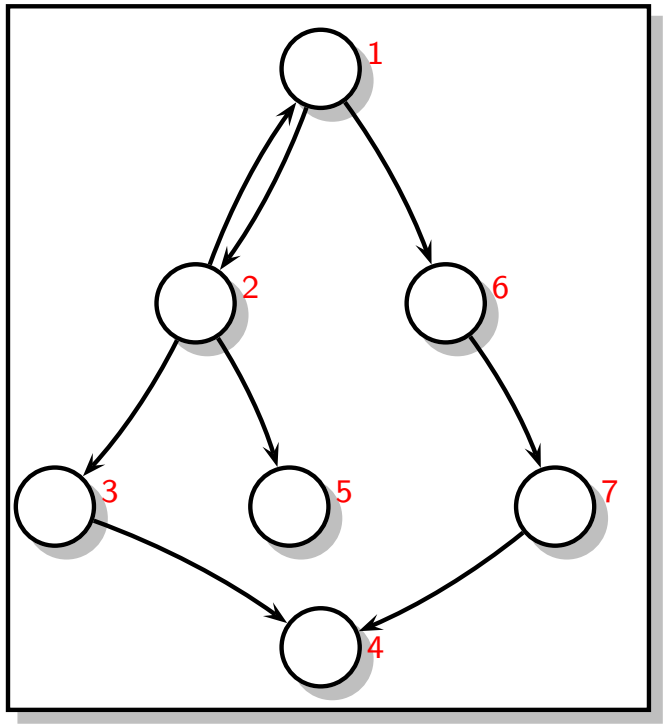
$\Rightarrow$ Il faut visiter en premier les derniers points ajoutés.

$\Rightarrow$ On utilise une pile (dernier arrivé premier servi)

Parcours en profondeur

Pour le parcours en profondeur, il faut visiter

- un des successeurs du points de départ ;
- puis un successeurs de ce dernier ;
- ...
- on ne revient en arrière que lorsqu'il n'y a pas de successeur ;
- ...



$\Rightarrow$ Il faut visiter en premier les derniers points ajoutés.

$\Rightarrow$ On utilise une pile (dernier arrivé premier servi)

Algorithme

Données : deb : le point de départ

marque : le tableau des marques

début

```
pile ← initPile()
pile.ajouteAuSommet(deb)
tant que pile.estVide() = false faire
    s = pile.sommet()                          // prochain sommet à visiter
    pile.enleveSommet()                        // on le retire de la liste
    si marque.estMarque(s) alors
        // on est déjà passé là
        ... on fait les opérations prévues
    sinon
        // on n'est jamais passé là
        ... on fait les opérations prévues
        marque.marquer(s)                      // il faut marquer s
        pour chaque t successeur de s faire
            pile.ajouteAuSommet(t)             // il faut visiter ses successeurs
```

fin

Algorithme 5 : ParcoursProfondeur(Sommet deb, TableauBooleen marque)

Parcours de l'ensemble du graphe (Rappel)

Pour visiter l'ensemble du graphe

Données : $G = [X, U]$: le graphe

début

```
    marque ← initMarques()
    pour s ∈ X faire
        si marque.estMarque(s) = FAUX alors
            Parcours...(s, marque)
```

fin

Algorithme 6 : ParcoursTotal(Graphe G)

Parcours en profondeur version récursive

La méthode s'appelle elle-même sur les successeurs qu'elle rencontre.

Données : s : le point de départ

marque : le tableau des marques

début

```
si marque.estMarque(s) alors
    // on est déjà passé là
    ... on fait les opérations prévues
sinon
    // on n'est jamais passé là
    ... on fait les opérations prévues
    marque.marquer(s) ;
    pour chaque t successeur de s faire
        ParcoursRecursif(t, matque) ;
```

fin

Algorithme 7 : ParcoursRecursif(Somment s, TableauBooleen marque)

? Où est passé la pile ?

Parcours de l'ensemble du graphe (Rappel)

Pour visiter l'ensemble du graphe

Données : $G = [X, U]$: le graphe

début

```
    marque ← initMarques()
    pour s ∈ X faire
        si marque.estMarque(s) = FAUX alors
            Parcours...(s, marque)
```

fin

Algorithme 8 : ParcoursTotal(Graphe G)

Fermeture transitive

Soit $G = [X, U]$ un graphe.

Définition (Fermeture transitive)

La fermeture transitive de G est le graphe $\overline{G} = [\overline{X}, \overline{U}]$ tq $(i, j) \in \overline{G}$ ssi il existe un chemin d'origine i et d'extrémité j.

Le calcul de la fermeture transitive passe par l'évaluation du nombre de chemins entre deux sommets.

Nombre de chemins entre deux sommets

Soient :

$$\begin{aligned} M &= (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} && \text{matrice incidence sommet sommet.} \\ M^k &= M \times \cdots \times M && \text{le produit de cette matrice } k \text{ fois.} \end{aligned}$$

Lemme

Les coefficients de M^k correspondent aux nombres de chemins ayant k arcs (de longueur k) entre tous les couples de sommets.

preuve par récurrence sur k :

- pour $k = 1$, M_{ij} est le nombre de chemins de longueur 1 de départ i et d'arrivée j.

Nombre de chemins entre deux sommets (suite)

- $HR_k \Rightarrow HR_{k+1}$:
  - M_{ij}^k indique le nombre de chemins de longueur k de i vers j.
  - $M_{ij}^{k+1} = \sum_{l=1}^{NS} M_{il}^k M_{lj}$.
  - Or M_{il}^k nombre de chemins de longueur k de i à l.
  - et M_{lj} nbre d'arcs de l à j (0 ou 1).
  - Donc $M_{il}^k M_{lj}$ est le nombre de chemins de longueur $k+1$ de i à j passant par l en dernier.
  - Ainsi $\sum_{l=1}^{NS} M_{il}^k M_{lj}$ est la somme des chemins passant par l lorsque l balaie l'ensemble des sommets.
- C.Q.F.D.

Existence d'un chemin entre deux sommets

Pour savoir s'il existe un chemin entre i et j il suffit de calculer M^1, M^2, ... M^∞.

Cela pose un problème ! Mais :

- S'il existe un chemin entre i et j il existe un chemin élémentaire entre i et j.
- Un chemin élémentaire a au plus NS sommets.
- Pour prouver l'existence ou non d'un chemin il suffit de s'arrêter à M^{NS}.

Lemme

Il existe un chemin de i à j si et seulement si :

$$M_{ij} + M_{ij}^2 + \cdots + M_{ij}^{NS} \neq 0$$

Remarque : on peut utiliser une matrice booléenne, comment faire ?

Algorithme

Données : M matrice incidence du graphe G, NS : nbre sommets

début

$FT \leftarrow M$

$A \leftarrow M$

pour i=2 à NS **faire**

$A \leftarrow A * M$

$FT \leftarrow FT + A$

fin

Résultat : FT fermeture transitive du graphe

Algorithme 9 : FermetureTransitive

Remarque :

- FT contiendra le nombre de chemins de longueur $\leq NS$ pour tous les couples de sommets.
- (i, j) appartient à $\overline{U}$ ssi $F_{ij} \neq 0$.
- Si on remplace toutes les valeurs non nulles de FT par 1 on a la matrice incidence de $\overline{G}$ fermeture transitive de G.

Complexité

- Quel est la compléxité ?
- Comment faire mieux ?

Fermeture transitive : Algorithme de Warshall

Principe

- On compte le nombre de chemins élémentaires ne passant par aucun sommet intermédiaire (les arcs).
- On compte le nombre de chemins élémentaires ne passant par aucun sommet intermédiaire (cas précédant) ou passant uniquement par le sommet 1.
- On compte le nombre de chemins élémentaires ne passant par aucun sommet intermédiaire ou passant uniquement par les sommets appartenant à $\{1, 2\}$.
- ...
- On compte le nombre de chemins élémentaires ne passant par aucun sommet intermédiaire ou passant par les sommets appartenant à $\{1, ..., NS\}$.

Définitions

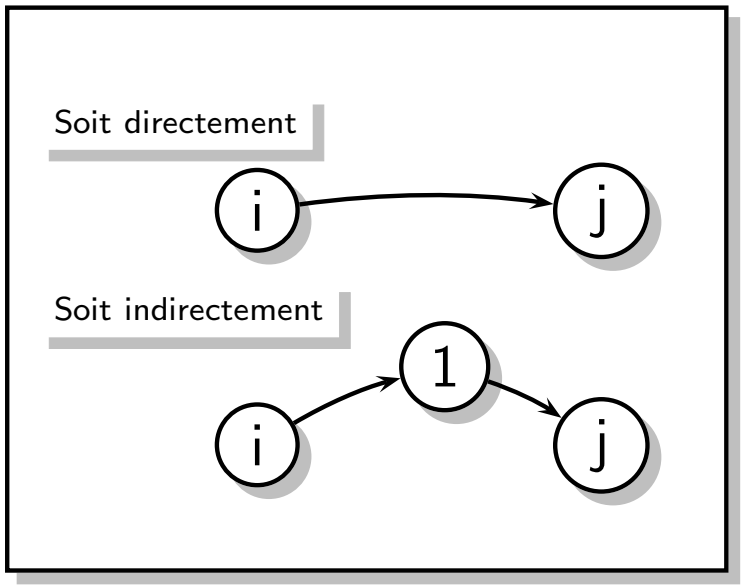
- Soit M matrice incidence du graphe.
- On définit une suite de graphes $G^{(k)}$pour $k \in \{0, \cdots, NS\}$
  - $G^{(0)} = G$ graphe de départ
  - $G^{(k)}$ est défini par :
    (i, j) est un arc de $G^{(k)}$ ssi il existe dans G un chemin de départ i et d'arrivée j dont les sommets intermédiaires appartiennent à $\{1, ..., k\}$.

  Remarque :
  - $\emptyset \subseteq \{1, ..., k\}$ donc les chemins ne sont pas obligés de passer par un autre sommet.
  - On ne considère que les chemins élémentaires donc ils ne passent pas 2 fois par le même point.
- On note $M^{(k)}$ la matrice de $G^{(k)}$.

Construction $M^{(k)}$ par récurrence

- $M^{(0)} = M$ par définition
- Pour construire $M^{(1)}$, on cherche les couples (i, j) tels qu'il existe un chemin élémentaire dont le sommet intermédiaire appartient à $\{1\}$.

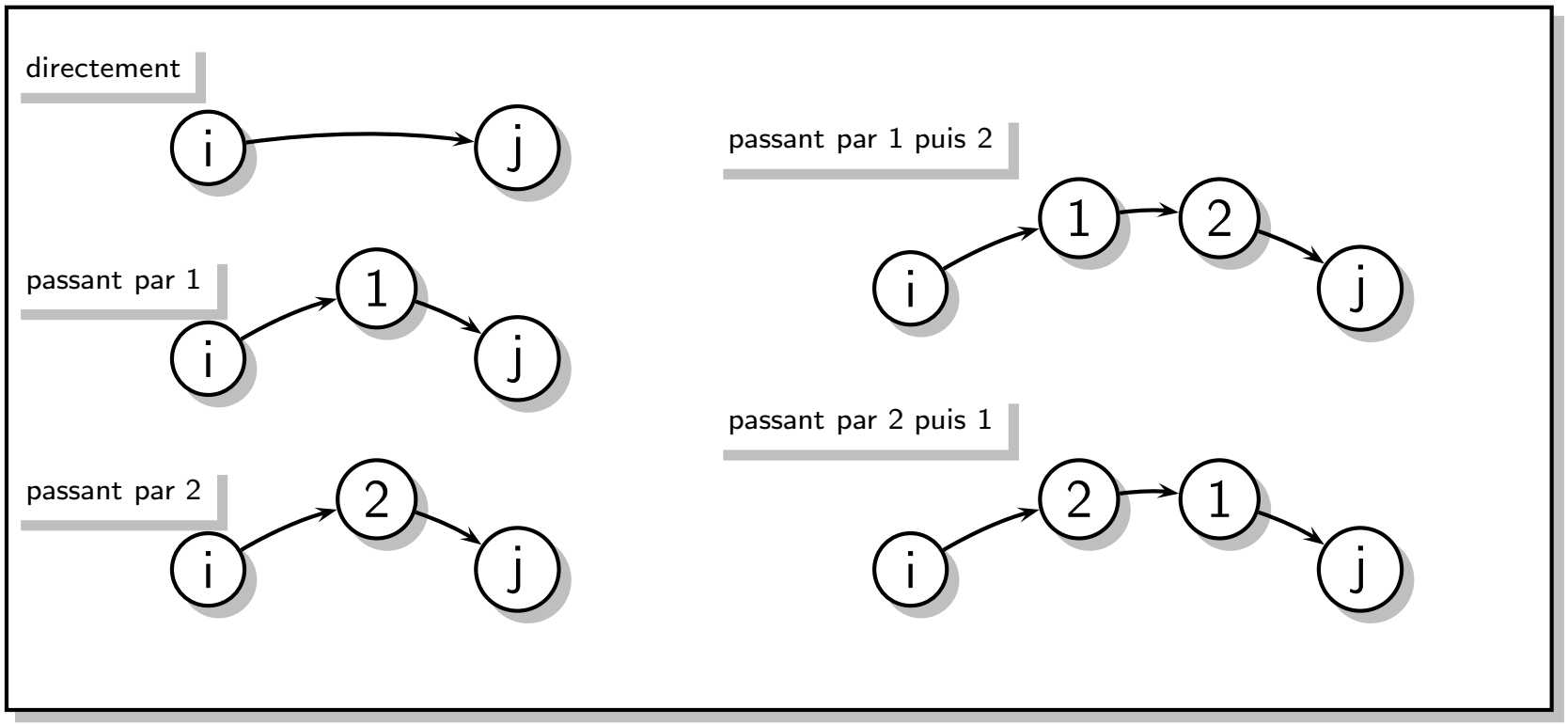
Il y a un chemin entre i et j passant éventuellement par 1 $\Leftrightarrow$



- Donc M^1_{ij} est vrai si M^0_{ij} est vrai ou (M^0_{i1} est vrai et M^0_{1j} est vrai).

Construction $M^{(k)}$ par récurrence (suite)

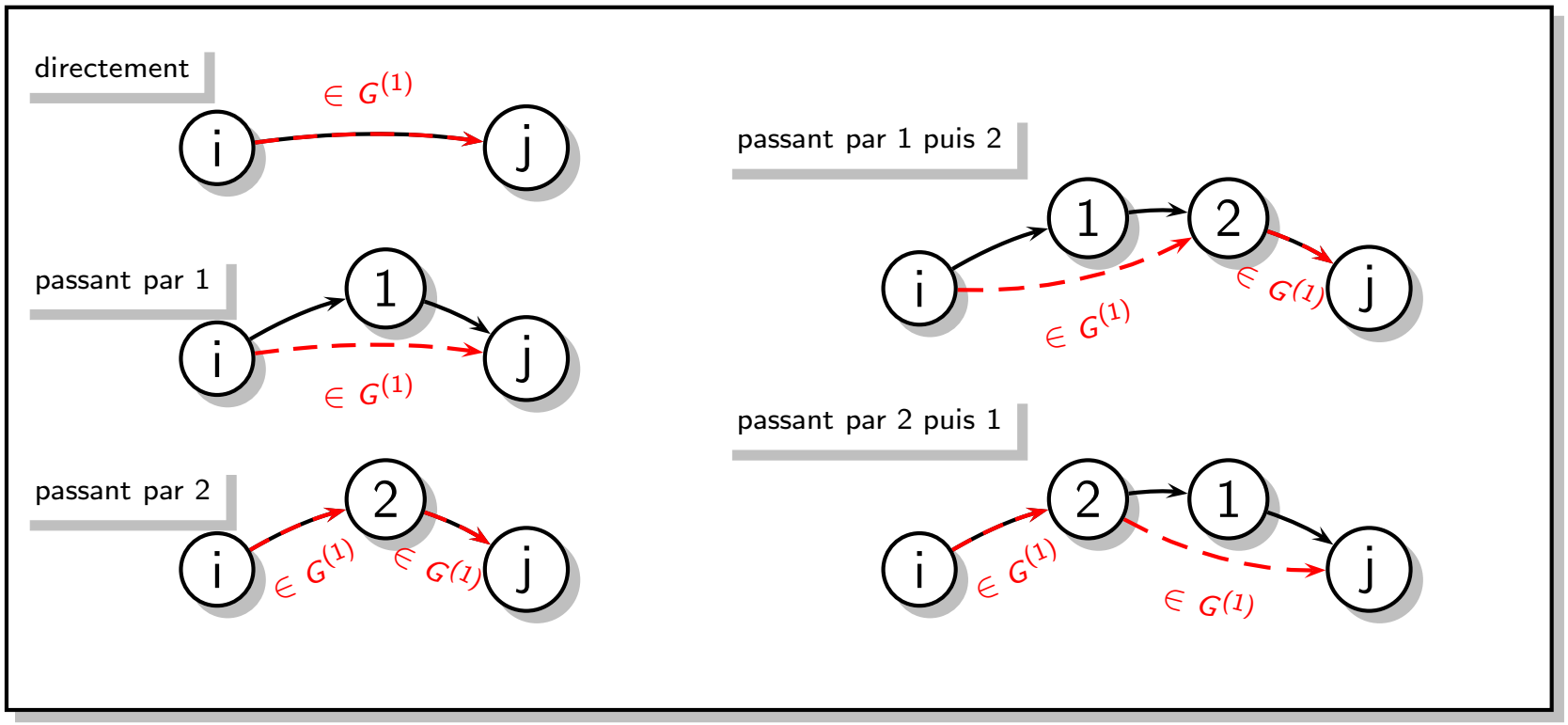
- Pour construire $M^{(2)}$, on cherche les couples (i, j) tels qu'il existe un chemin élémentaire dont les sommets intermédiaires appartiennent à $\{1, 2\}$.
- Il y a un chemin entre i et j passant éventuellement par 1 ou 2 $\Leftrightarrow$



- M^2_{ij} est vrai si M^1_{ij} est vrai ou (M^1_{i2} est vrai et M^1_{2j} est vrai).

Construction $M^{(k)}$ par récurrence (suite)

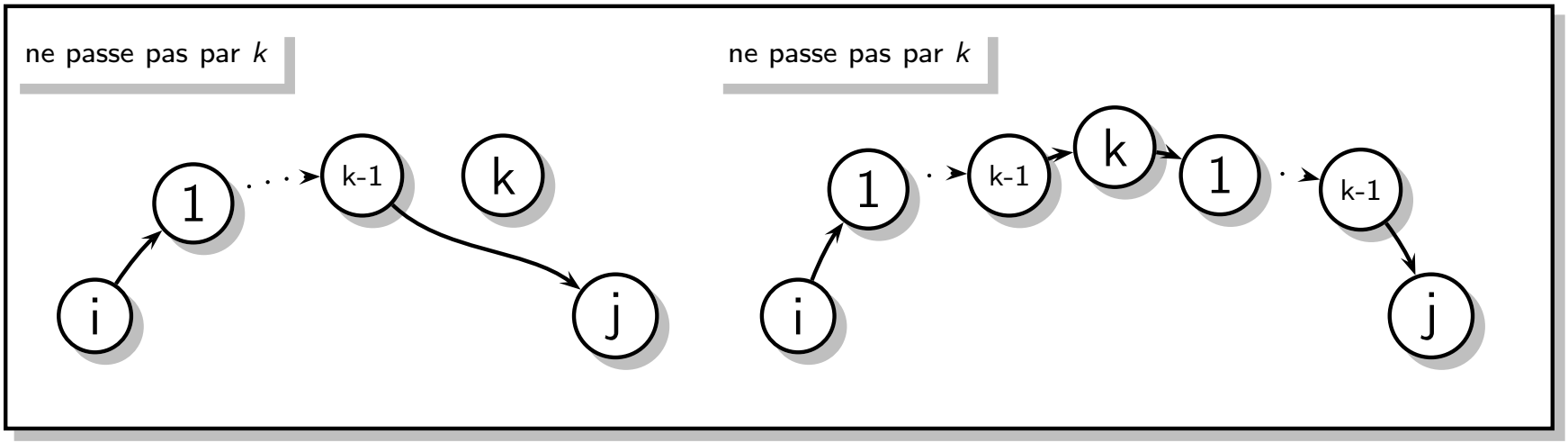
- Pour construire $M^{(2)}$, on cherche les couples (i, j) tels qu'il existe un chemin élémentaire dont les sommets intermédiaires appartiennent à $\{1, 2\}$.
- Il y a un chemin entre i et j passant éventuellement par 1 ou 2 $\Leftrightarrow$



- M^2_{ij} est vrai si M^1_{ij} est vrai ou (M^1_{i2} est vrai et M^1_{2j} est vrai).

Construction $M^{(k)}$ par récurrence (suite)

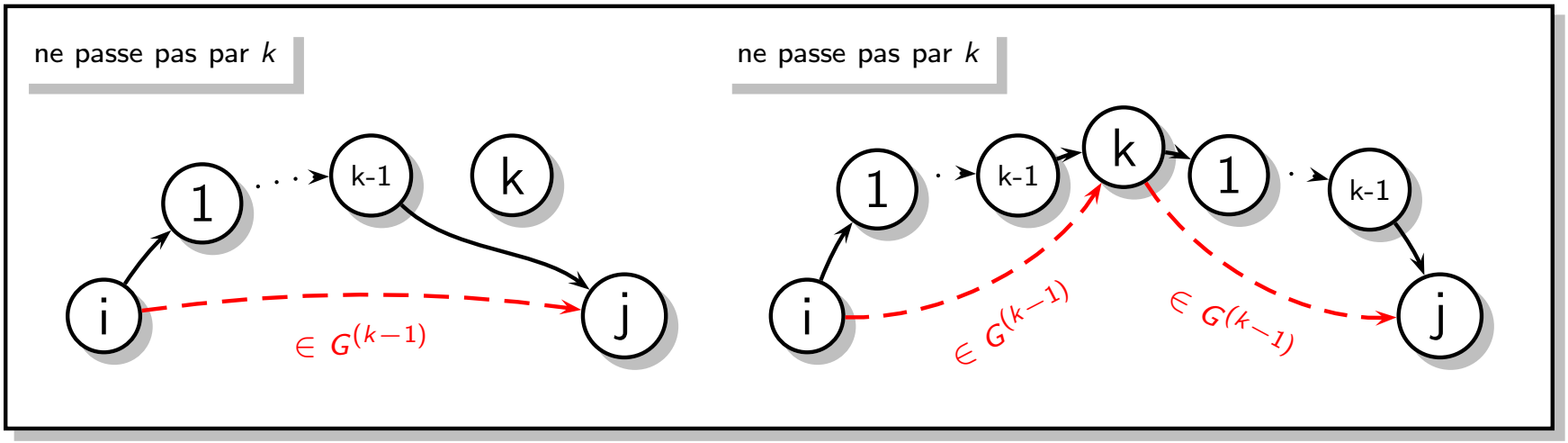
- Pour construire $M^{(k)}$, on cherche les couples (i, j) tels qu'il existe un chemin élémentaire dont les sommets intermédiaires appartiennent à $\{1, \ldots, k\}$ sachant qu'on a déjà $M^{(k-1)}$.



- Soit le chemin ne passe pas par k alors (i, j) appartient à G^{k-1}.
- Soit le chemin passe une fois par k alors (i, k) appartient à G^{k-1} et (k, j) appartient à G^{k-1}.
- Donc M_{ij}^k est vrai si M_{ij}^{k-1} est vrai ou (M_{ik}^{k-1} est vrai et M_{kj}^{k-1} est vrai).

Construction $M^{(k)}$ par récurrence (suite)

- Pour construire $M^{(k)}$, on cherche les couples (i, j) tels qu'il existe un chemin élémentaire dont les sommets intermédiaires appartiennent à $\{1, \ldots, k\}$ sachant qu'on a déjà $M^{(k-1)}$.



- Soit le chemin ne passe pas par k alors (i, j) appartient à G^{k-1}.
- Soit le chemin passe une fois par k alors (i, k) appartient à G^{k-1} et (k, j) appartient à G^{k-1}.
- Donc M_{ij}^k est vrai si M_{ij}^{k-1} est vrai ou (M_{ik}^{k-1} est vrai et M_{kj}^{k-1} est vrai).

Algorithme

Données : M la matrice booléenne du graphe, NS le nombre de sommets

début

$M^0 \leftarrow M$

pour $k = 1$ *à* NS **faire**

pour $i = 1$ *à* NS **faire**

pour $j = 1$ *à* NS **faire**

$M_{ij}^k \leftarrow M_{ij}^{k-1}$ ou $(M_{ik}^{k-1}$ et $M_{kj}^{k-1})$

fin

Algorithme 10 : Warshall(M, NS)

Présentation du problème

On considère un graphe valué :

Définition (Graphe valué)

Un graphe valué est un graphe orienté muni d'une application $w : U \to \mathbb{R}$. Pour tout arc $u = (s, s')$ $w(s, s')$ est la valeur, le poids ou le coût de l'arc u.
Notation : $G[X, U, w]$.

- Dans ce cours les graphes ont toujours des valuations positives.
- La valeur d'un chemin entre 2 sommets est la somme des valeurs des arcs qui le composent.
- Comment calculer la distance entre 2 points sachant que plusieurs chemins sont possibles ?

Plus court chemin

Pour aller d'un point à un autre, le coût est celui du chemin de poids minimal.

Pourquoi ne pas tester tous les chemins possibles ?

Le problème de la recherche d'un chemin de valeur minimale peut se présenter sous 3 formes :

- recherche entre 2 sommets donnés ;
- recherche entre 1 sommet et tous les autres ;
- recherche sur tous les couples de sommets.

Nous ne verrons que la recherche entre un point et tous les autres.
Nous verrons ce calcul en 2 étapes :

- calcul de la valeur du chemin minimal ;
- calcul du chemin lui même.

Principe

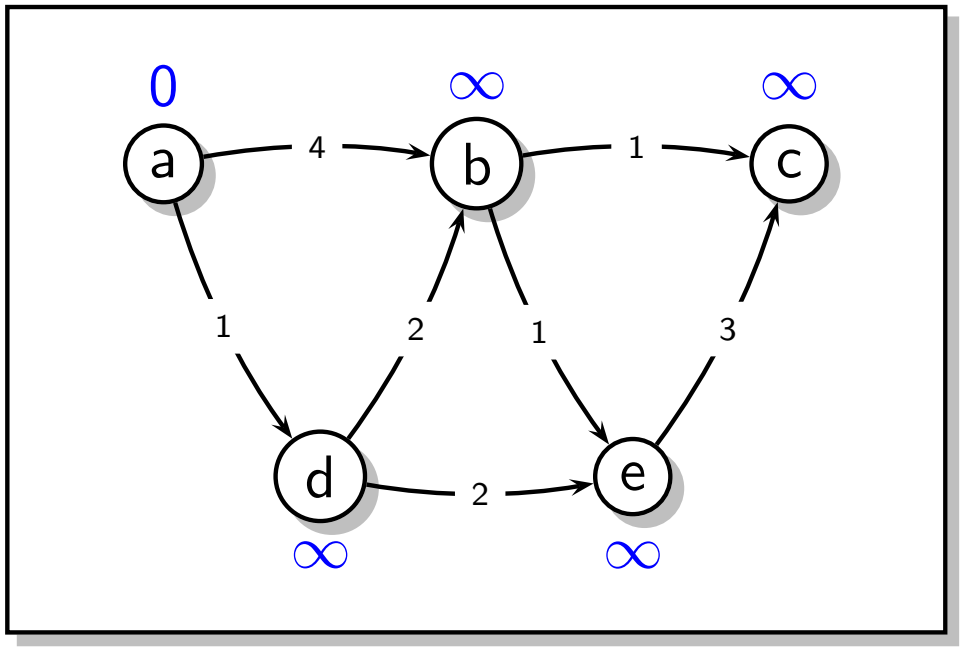
On calcule progressivement la longueur du plus court chemin à partir du sommet source s.

- Pour cela on maintient $d_s(v)$ les distances entre s le sommet initial et v les autres sommets.
- Au départ :

$$d_s(v) = \begin{cases} 0 \text{ si } s = v \\ \infty \text{ si } s \neq v \end{cases}$$

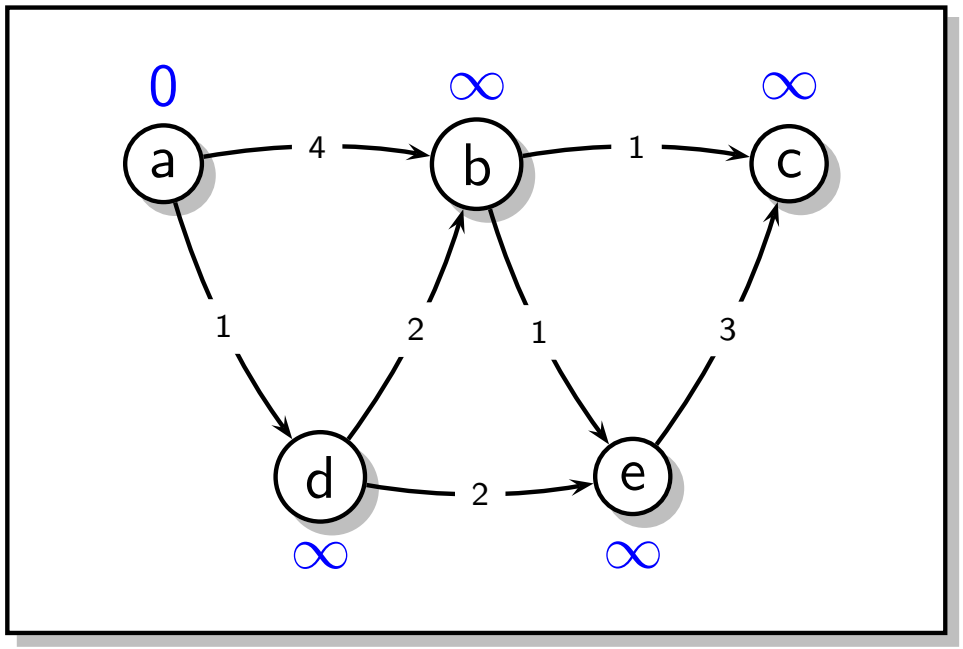
- On parcourt les arcs dans un ordre quelconque.
- Pour chaque arc (v, v') :
  - si $d_s(v) + w(v, v') < d_s(v')$ le chemin de s vers v' passant par v est plus court que celui trouvé précédemment
  - sinon ce chemin est plus long.
- Si on parcourt plusieurs fois les arcs, on finit par trouver l'ensemble des chemins les plus courts au départ de s.

Exemple départ



On cherche le chemin le plus court au départ de a.
On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).

Exemple premier parcourt

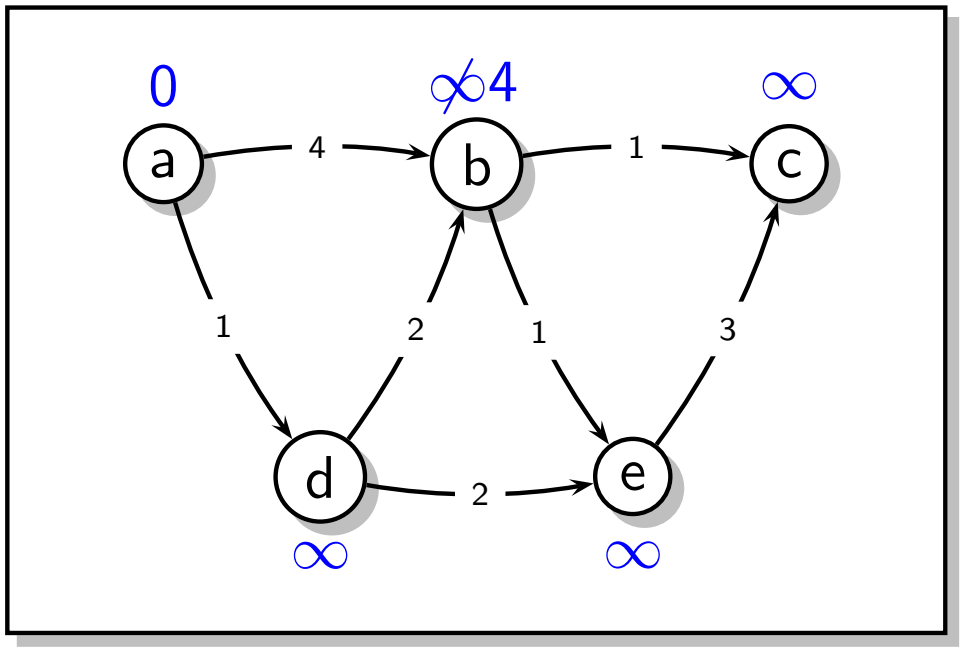


On cherche le chemin le plus court au départ de a.

On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).

Est-ce suffisant ? Quel chemin plus court a-t-on trouvé ?

Exemple premier parcourt

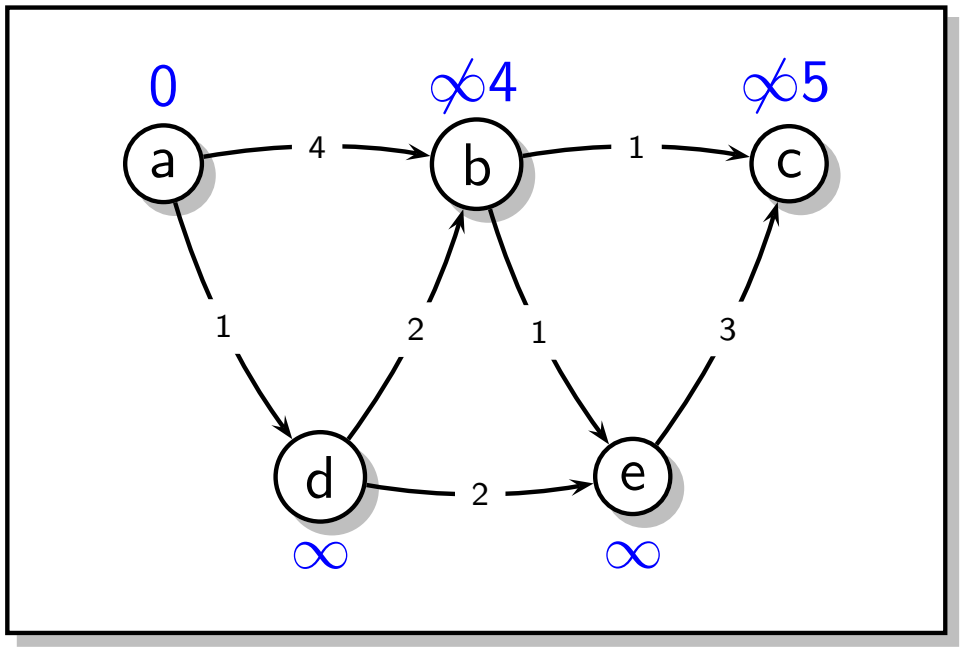


On cherche le chemin le plus court au départ de a.

On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).

Est-ce suffisant ? Quel chemin plus court a-t-on trouvé ?

Exemple premier parcourt

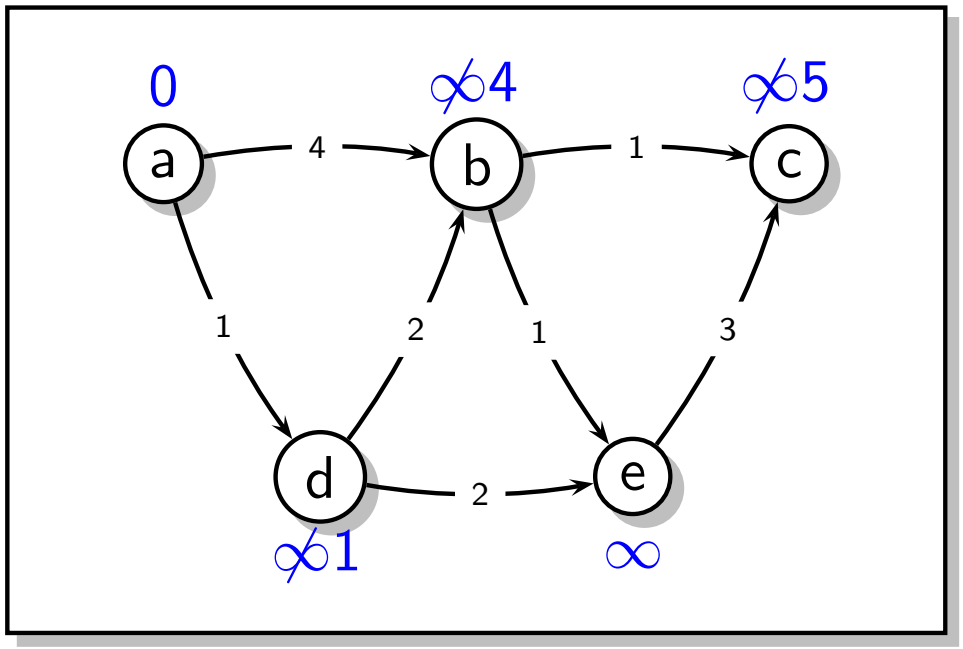


On cherche le chemin le plus court au départ de a.

On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).

Est-ce suffisant ? Quel chemin plus court a-t-on trouvé ?

Exemple premier parcourt

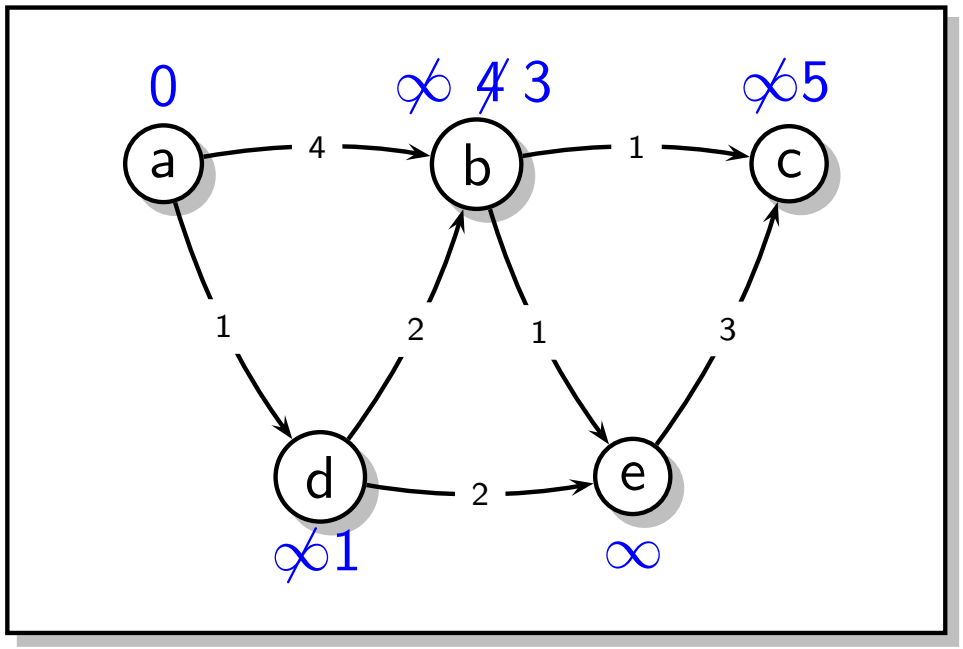


On cherche le chemin le plus court au départ de a.

On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).

Est-ce suffisant ? Quel chemin plus court a-t-on trouvé ?

Exemple premier parcourt

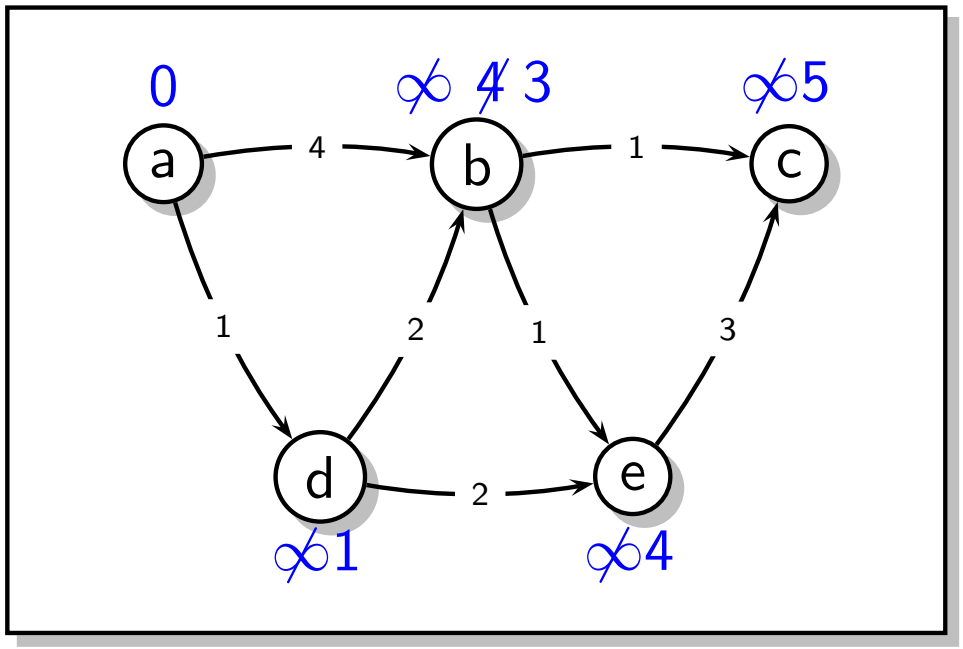


On cherche le chemin le plus court au départ de a.

On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).

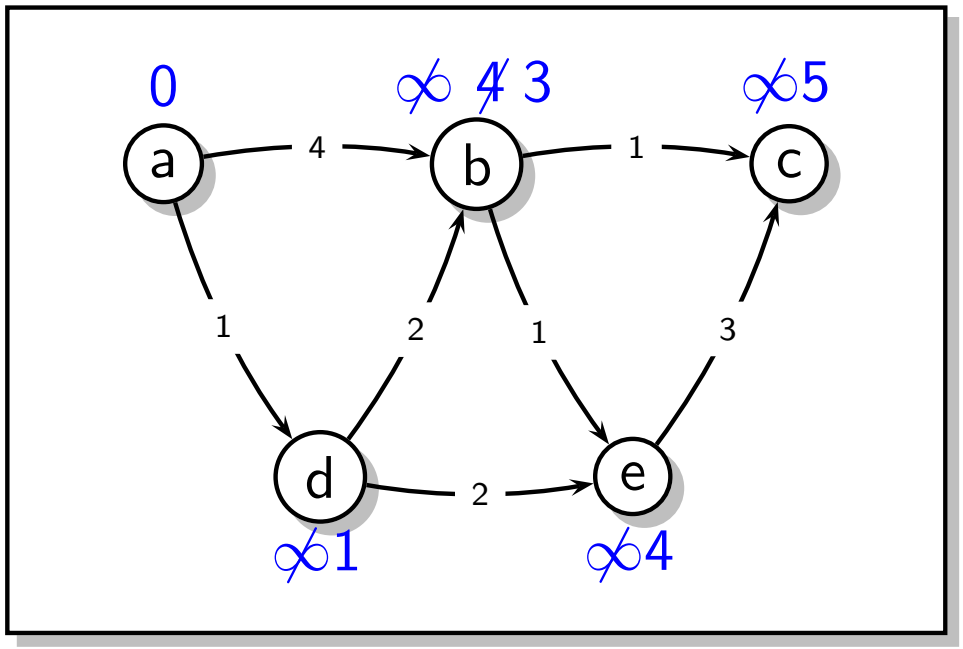
Est-ce suffisant ? Quel chemin plus court a-t-on trouvé ?

Exemple premier parcourt



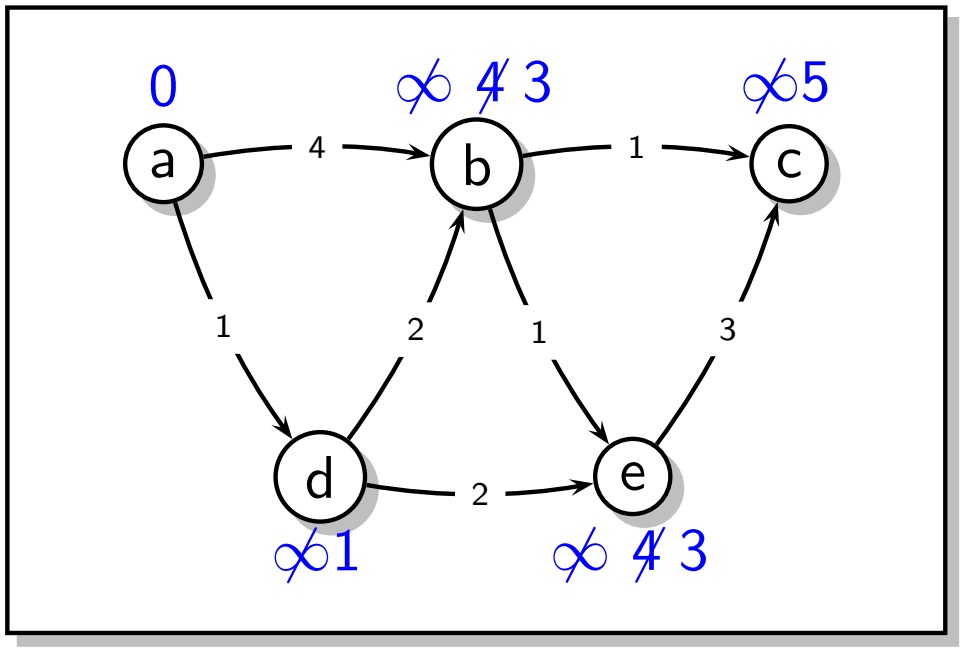
On cherche le chemin le plus court au départ de a.
On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).
Est-ce suffisant ? Quel chemin plus court a-t-on trouvé ?

Exemple premier parcourt



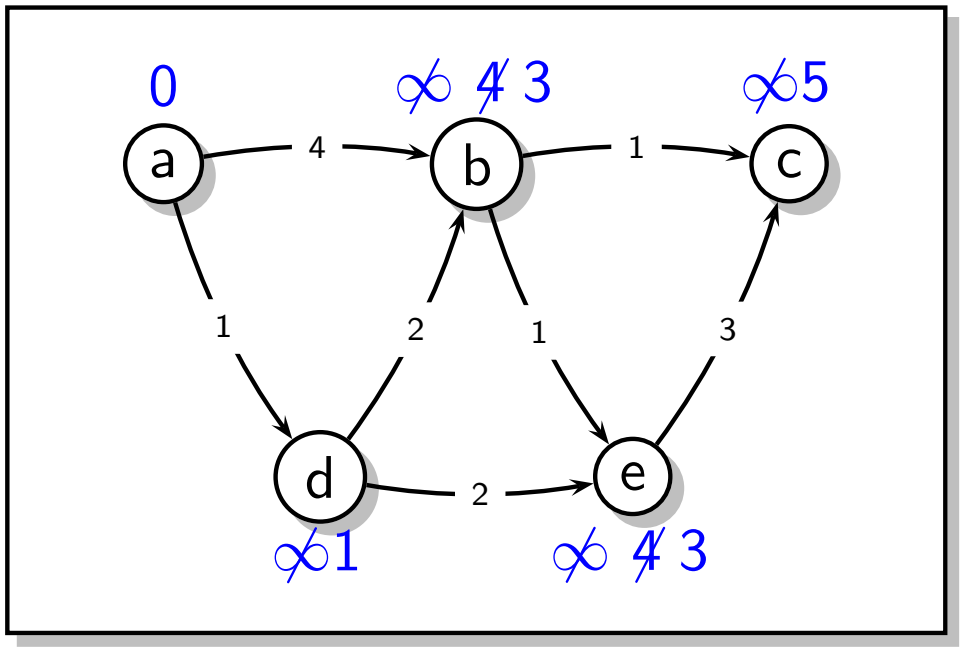
On cherche le chemin le plus court au départ de a.
On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).
Est-ce suffisant ? Quel chemin plus court a-t-on trouvé ?

Exemple premier parcourt



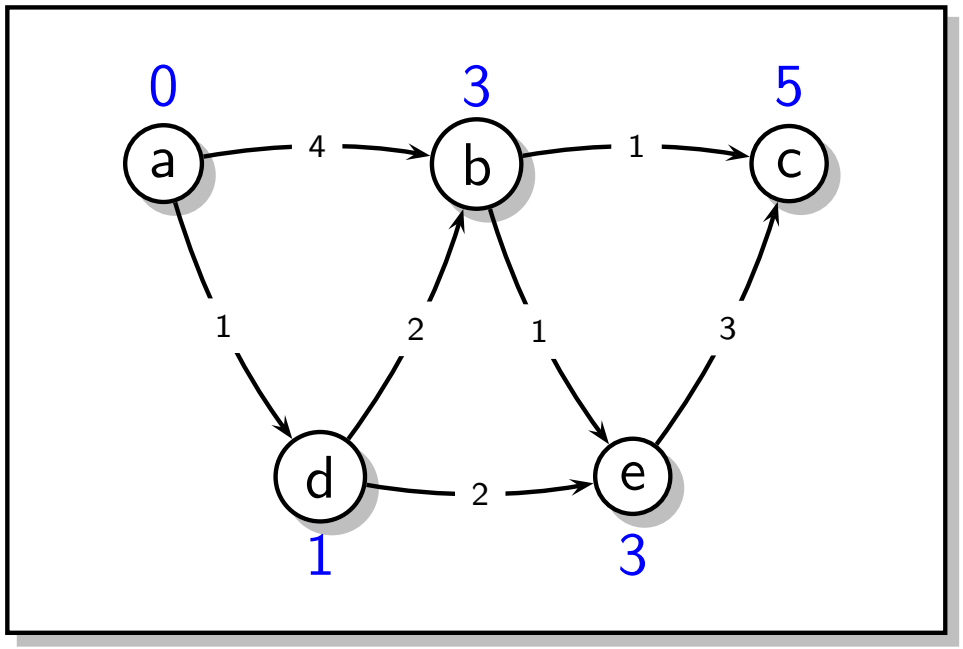
On cherche le chemin le plus court au départ de a.
On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).
Est-ce suffisant ? Quel chemin plus court a-t-on trouvé ?

Exemple premier parcourt



On cherche le chemin le plus court au départ de a.
On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).
Est-ce suffisant ? Quel chemin plus court a-t-on trouvé ?

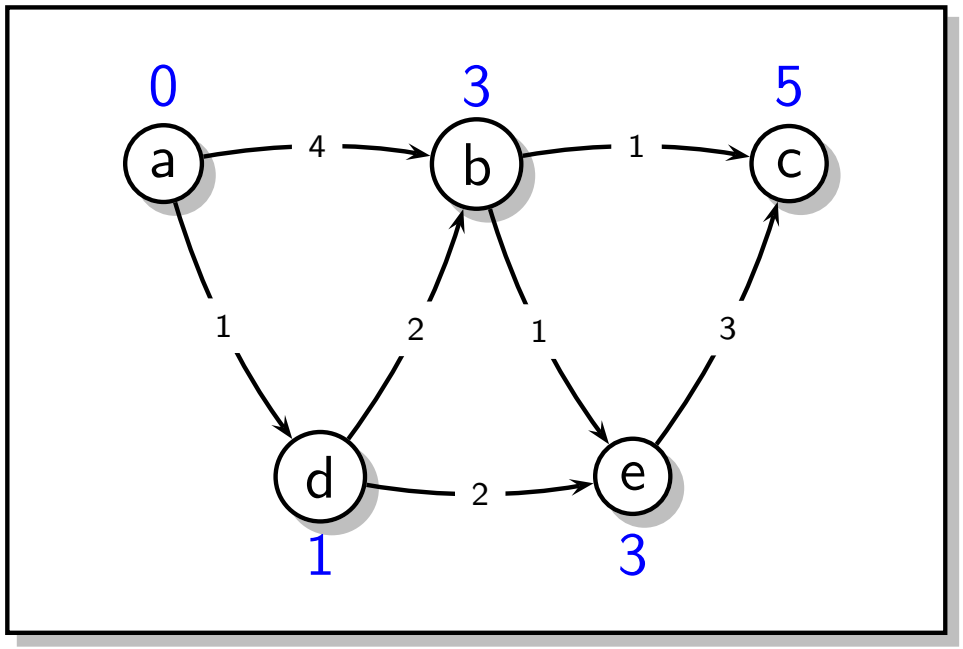
Exemple second parcourt



On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).

Lors du troisième parcours il n'y a aucun changement de valeur ce qui permet de savoir qu'on peut s'arrêter. Tous les chemins les plus courts ont été trouvés.

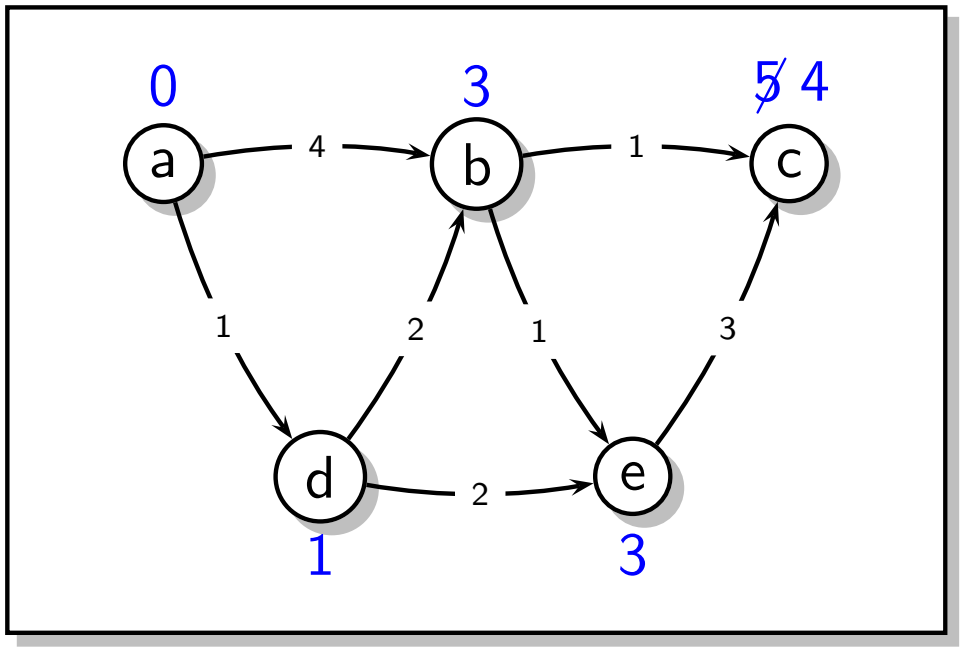
Exemple second parcourt



On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).

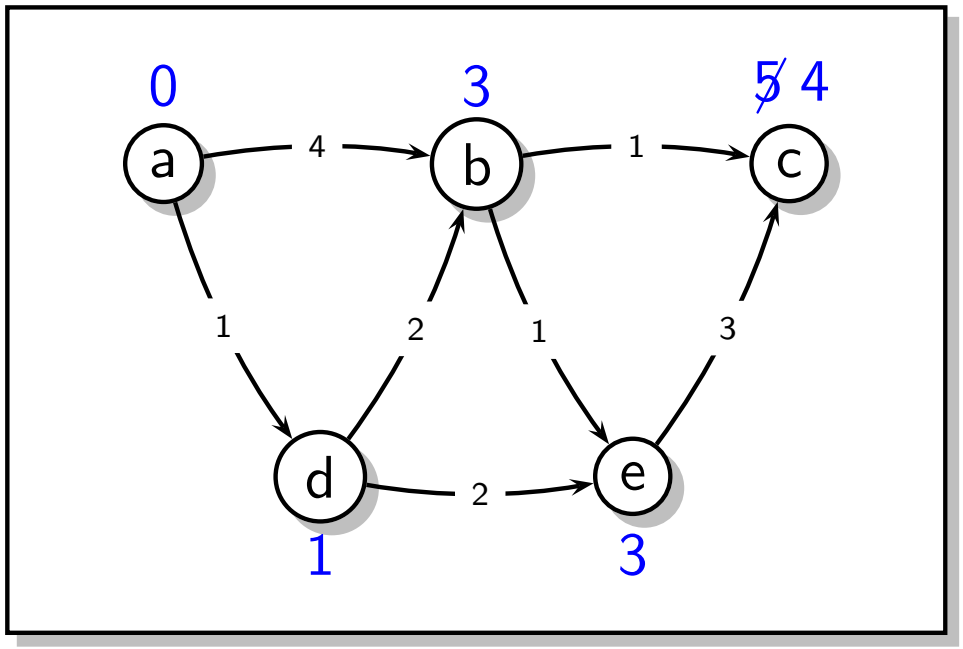
Lors du troisième parcours il n'y a aucun changement de valeur ce qui permet de savoir qu'on peut s'arrêter. Tous les chemins les plus courts ont été trouvés.

Exemple second parcourt



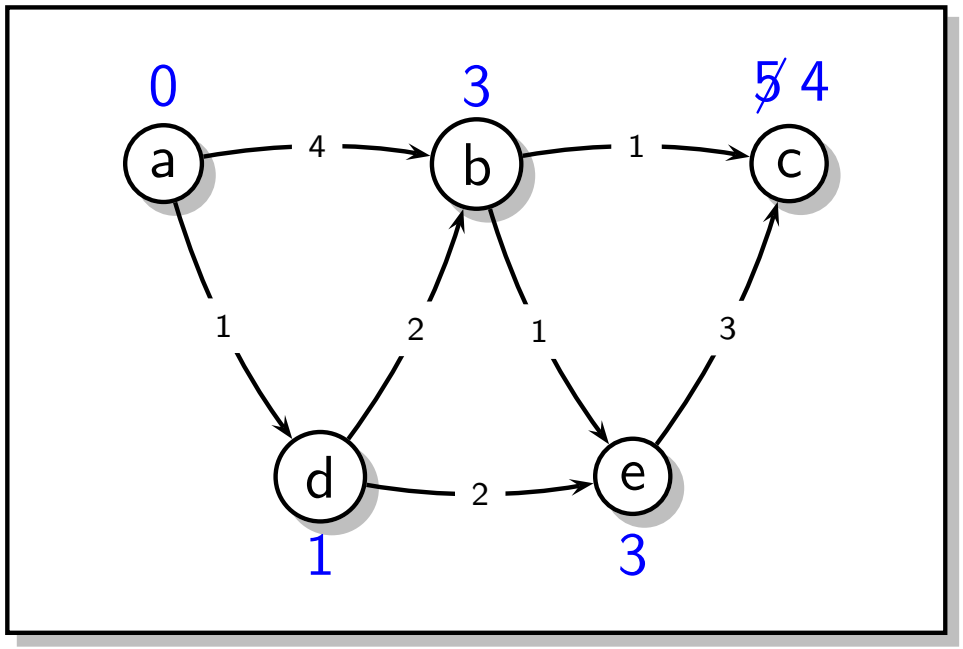
On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).
Lors du troisième parcours il n'y a aucun changement de valeur ce qui permet de savoir qu'on peut s'arrêter. Tous les chemins les plus courts ont été trouvés.

Exemple second parcourt



On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).
Lors du troisième parcours il n'y a aucun changement de valeur ce qui permet de savoir qu'on peut s'arrêter. Tous les chemins les plus courts ont été trouvés.

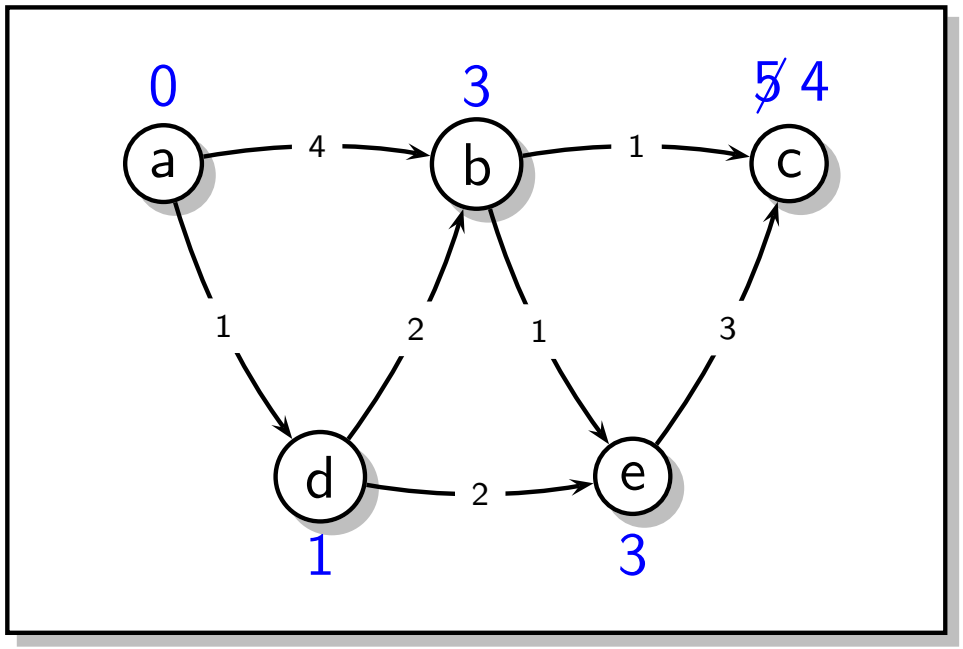
Exemple second parcourt



On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).

Lors du troisième parcours il n'y a aucun changement de valeur ce qui permet de savoir qu'on peut s'arrêter. Tous les chemins les plus courts ont été trouvés.

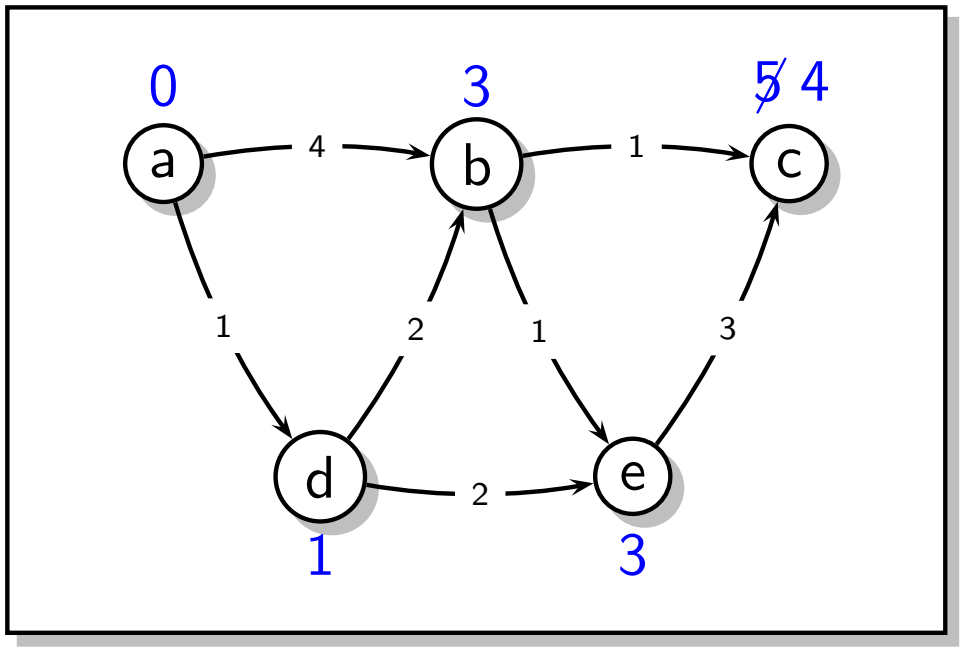
Exemple second parcourt



On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).

Lors du troisième parcours il n'y a aucun changement de valeur ce qui permet de savoir qu'on peut s'arrêter. Tous les chemins les plus courts ont été trouvés.

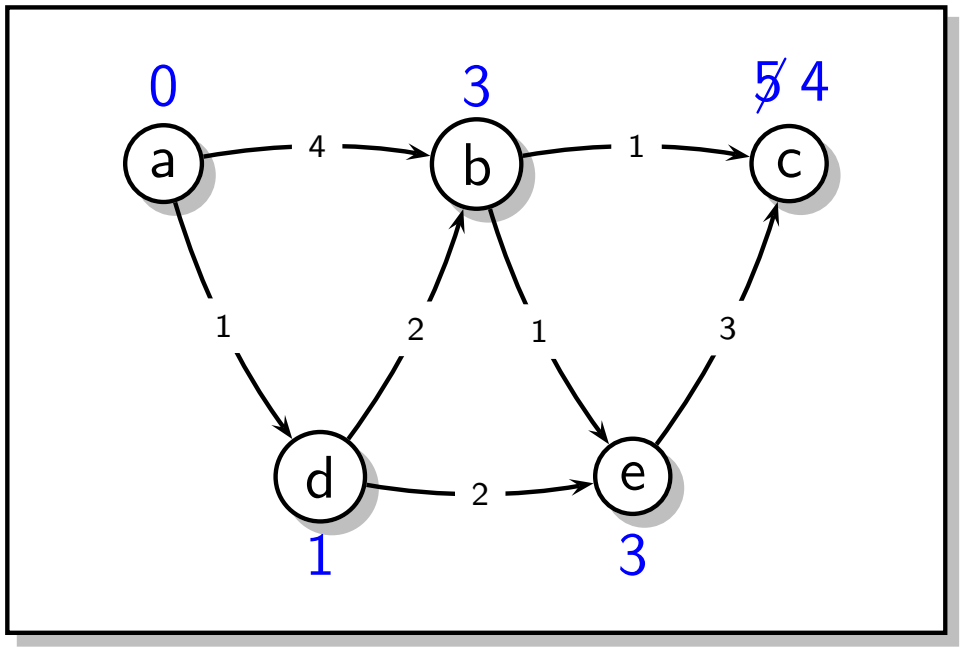
Exemple second parcourt



On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).

Lors du troisième parcours il n'y a aucun changement de valeur ce qui permet de savoir qu'on peut s'arrêter. Tous les chemins les plus courts ont été trouvés.

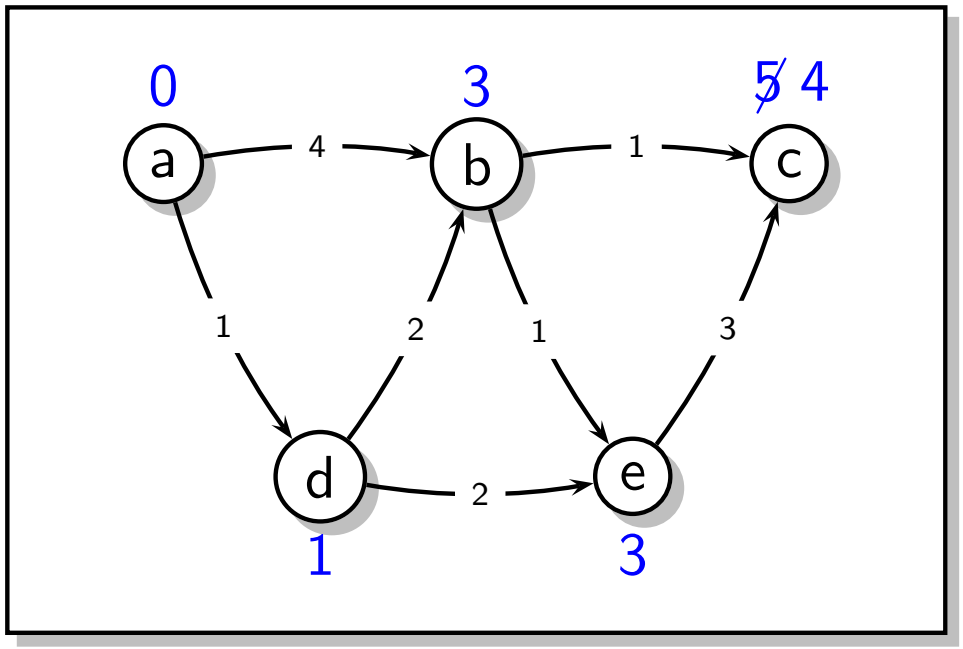
Exemple second parcourt



On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).

Lors du troisième parcours il n'y a aucun changement de valeur ce qui permet de savoir qu'on peut s'arrêter. Tous les chemins les plus courts ont été trouvés.

Exemple second parcourt



On parcourt par exemple les arcs dans l'ordre (a,b), (b,c), (a,d), (d,b), (b,e), (e,c) et (d,e).
Lors du troisième parcours il n'y a aucun changement de valeur ce qui permet de savoir qu'on peut s'arrêter. Tous les chemins les plus courts ont été trouvés.

Description de l'algorithme

On cherche le plus court chemin entre s sommet de départ et les autres sommets.

Remarque :

- L'algorithme de FORD indique aussi si il existe ou non un chemin entre s et les autres sommets : il y a un chemin de s à v si $d_s(v) < \infty$.
- Calculer la distance d'un point s à un autre point v demande le calcul de toute les distances de s à tous les autres points du graphe.

Il reste 2 questions :

- Pourquoi faut-il calculer toutes les distances ?
- Combien faut-il d'étapes (de parcours de la liste des arcs) ?

Algorithme

Données : s sommet de départ, $G = (S, U, w)$ le graphe, w est positif

début

pour *chaque sommet* $v \in S$ **faire**
$d_s(v) \leftarrow \infty$

continue $\leftarrow$ vrai

tant que *continue* **faire**
continue $\leftarrow$ faux // a priori c'est le dernier tour

pour *chaque arrête* $(v, v') \in U$ **faire**
si $d_s(v) + w(v, v') < d_s(v')$ **alors**
$d_s(v') \leftarrow d_s(v) + w(v, v')$
continue $\leftarrow$ vrai // il y a eu un changement
// donc il faut refaire un tour

fin

Résultat : d_s le tableau des distances depuis s

Algorithme 11 : FORD

Remarques :

- l'ordre dans lequel sont explorés les arcs n'est pas précisé ;
- on suppose des poids positifs.

Quelques propriétés

On prouve facilement que

Lemme (Plus court chemins)

Comme les arcs ont des valeurs positives :

- *Pour chaque sommet v, le plus court chemin de s à v existe.*
- *Le plus court chemin de s à v n'a pas de cycle.*
- *Le plus court chemin de s à v comporte au plus NS sommets.*

On peut aussi montrer que

Lemme (Emboîtement)

Si le plus court chemin de s à v est $(s, v_1, \ldots, v_k, v)$, alors
$\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ le plus court chemin de s à v_i est

$$(s, v_1, \ldots, v_i)$$

On le prouve par l'absurde, si $(s, v'_1, \ldots, v'_l, v_i)$ est plus court pour aller de s à v_i,

alors par définition $(s, v'_1, \ldots, v'_l, v_i) < (s, v_1, \ldots, v_i)$

donc $(s, v'_1, \ldots, v'_l, v_i, \ldots, v_k, v) < (s, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k, v) = (s, v_1, \ldots, v_k, v)$

CQFD

Preuve de l'algorithme

- Par récurrence on peut monter que :
  - Le premier parcours nous assure de trouver la distance pour les chemins les plus courts qui ont 1 arrête.
  - Le deuxième parcours nous assure de trouver la distance pour les chemins les plus courts qui ont 2 arrêtes.
  - ...
  - Le k^e parcours nous assure de trouver la distance pour les chemins les plus courts qui ont k arrêtes.
- Or un plus court chemin comporte au plus NS sommets donc $NS - 1$ arrêtes.
- L'algorithme se termine au bout de (au plus) $NS - 1$ itérations en ayant calculer toutes les distances.

Calcul de la complexité

- Combien d'opérations fait-on dans l'initialisation ?
- Combien d'opérations fait-on dans la boucle **Pour** interne à la boucle **Tant que** ?
- Combien d'opérations fait-on dans la boucle **Tant que** ?
- Quelle est la compléxité ?

Détermination du plus court chemin

Comment calcule-t-on les chemins ?

- Comme les chemins sont emboîtés, pour chaque sommet il suffit de connaître son prédécesseur.
- Il suffit de mémoriser dans un tableau que le père du sommet v' est v.
- Il faut mettre à jour ce tableau à chaque fois qu'on met à jour la distance.

Algorithme

Données : s sommet de départ, $G = (S, U, w)$ le graphe, w est positif

début

pour *chaque sommet* $v \in S$ **faire**

$d_s(v) \leftarrow \infty$

$pred(v) \leftarrow \emptyset$ // a priori pas de prédécesseur

continue $\leftarrow$ vrai

tant que *continue* **faire**

continue $\leftarrow$ faux

pour *chaque arrête* $(v, v') \in U$ **faire**

si $d_s(v) + w(v, v') < d_s(v')$ **alors**

$d_s(v') \leftarrow d_s(v) + w(v, v')$

$pred(v') \leftarrow v$ // le prédécesseur de v' est maintenant v

continue $\leftarrow$ vrai

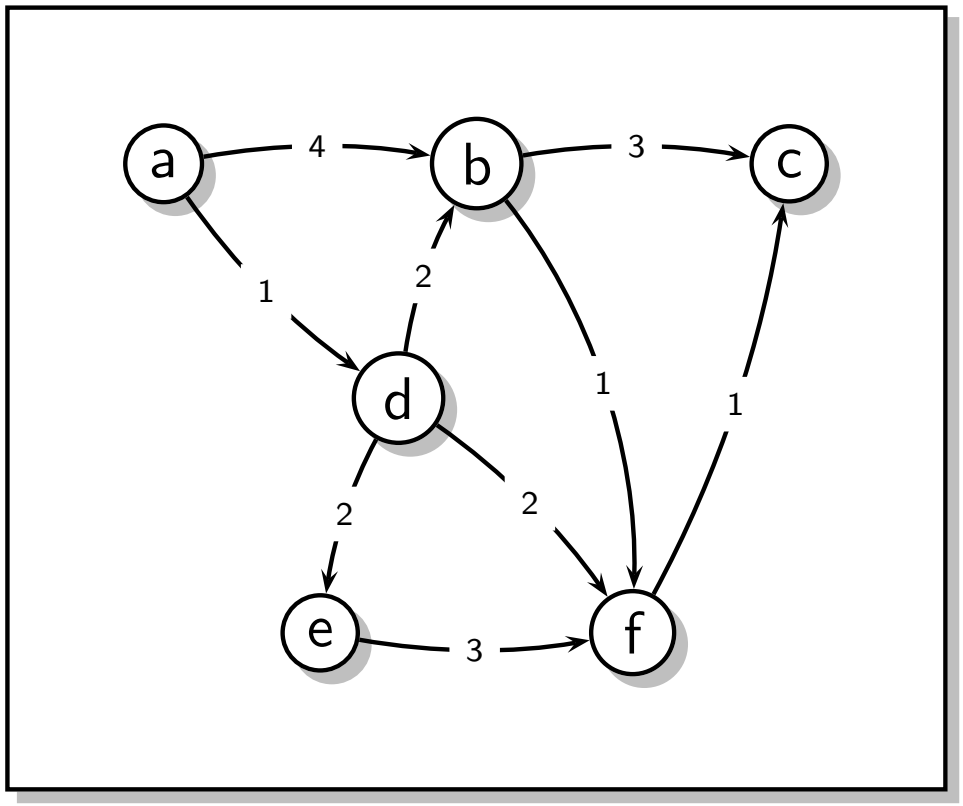
fin

Résultat : d_s le tableau des distances depuis s et *pred* le tableau des prédécesseurs

Algorithme 12 : FORD

Remarques pour avoir le chemin de s à t, on part de t et on remonte les prédécesseurs.

Exemple



Calculer les plus courts chemins au départ de a, en utilisant l'ordre de parcourt (a, b), (a, d), (b, c), (b, f), (d, e), (d, f), (e, f).

- Calculez les distances et les prédécesseurs.
- Donnez les chemins

Conclusion

- L'algorithme de FORD fonctionne aussi s'il existe des chemins de valeurs négatives
  - il faut vérifier s'il existe des cycles de valeur négative ;
  - l'algorithme permet de le faire.
- On peut améliorer la compléxité en choisissant correctement l'ordre de parcourt des arcs. C'est le principe de l'algorithme de DIJKSTRA.
- L'algorithme est utilisé dans les cas ou le calcul est distribué dans le graphe, chaque sommet du graphe n'a besoin de savoir que :
  - sa distance avec ses voisins directes ;
  - leur distance avec les voisins du graphe connus ;
  - on parle de vecteur de distance.

  Par exemple protocole RIP pour le calcul du chemin le plus court dans un réseau informatique.