

Fascicule d'exercices pour l'UE TMB

Printemps 2015

Responsable : Maria Carrizosa

- TD 1 – Nombres complexes. Racines de polynômes complexes. Factorisation de polynômes réels.
- TD 2 – Systèmes d'équations linéaires, matrices et espaces vectoriels \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 (début).
- TD 3 – Espaces vectoriels \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 (fin) et applications linéaires.
- TD 4 – Géométrie cartésienne dans le plan. Droites et coniques.
- TD 5 – Géométrie cartésienne dans l'espace. Droites, plans et quadriques.
- TD 6 – Fonctions. Graphes élémentaires. Composées et réciproques.
- TD 7 – Équations, diséquations et domaine de définition.
- TD 8 – Dérivées. Dérivée des fonctions composées.
- TD 9 – Points critiques, extrema locaux et points d'inflexion.
- TD 10 – Formule de Taylor et approximations.
- TD 11 – Intégration par partie et par changement de variable.
- TD 12 – Primitive des fractions rationnelles et intégrales.
- TD 13 – Equations différentielles du 1er ordre.
- TD 14 – Equations différentielles du 2ème ordre.

TD 1 – NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 – Nombres complexes et plan complexe

Dessiner les nombres complexes suivants sur le plan complexe :

a) $-2i$

b) $3 + 2i$

c) $\overline{3 + 2i}$

d) $5i - 1$

Exercice 2 – Opération entre nombres complexes

Calculer les sommes, produits, quotients, parties réelle et imaginaire suivants :

a) $(3 + 2i) - (5i - 1)$

c) $(3 + 2i)(5i - 1)$

e) $\frac{3 + 2i}{5i - 1}$

g) $\operatorname{Re}(i(1 - i))$

b) $(3 + 2i) + \overline{(3 + 2i)}$

d) $(3 + 2i)\overline{(3 + 2i)}$

f) $(3 + 2i)^2$

h) $\operatorname{Im}((1 - i)i - 3i)$

Exercice 3 – Représentation polaire des nombres complexes

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants, les écrire sous forme polaire et les dessiner sur le plan complexe :

a) $-i$

b) $3 + 3i$

c) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}\right)^2$

d) $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^3$

Exercice 4 – Racines carrées de nombres complexes

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants et les dessiner sur le plan complexe :

a) 1

b) -1

c) i

d) $1 + i$

e) $8 - 6i$

Exercice 5 – Équations complexes

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $z^2 = 7 + 24i$

d) $z^3 = -8i$

g) $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$

b) $z^2 - 2iz + 3i = 0$

e) $z^5 - z = 0$

c) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$

f) $z^5 + 1 = 0$

h) $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$

Exercice 6 – Factorisation de polynômes réels en polynômes complexes irréductibles

Trouver les racines complexes des polynômes réels suivants et écrire leur factorisation en produit de polynômes complexes irréductibles :

a) $X^2 + 1$

b) $X^2 + X + 1$

c) $X^2 + 2X + 2$

d) $X^2 + 3X + 3$

Exercice 7 – Factorisation de polynômes réels en polynômes réels irréductibles

Factoriser les polynômes réels suivants en produit de polynômes réels irréductibles, en utilisant les racines complexes si nécessaire :

a) $X^3 + 1$

b) $X^4 + 1$

c) $X^4 + 3X^2 + 2$

**TD 2 – SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES, MATRICES ET ESPACES
VECTORIELS \mathbb{R}^2 ET \mathbb{R}^3 (début)**

Exercice 8 – Produit et déterminant de matrices

Calculer, lorsque c'est possible, les produits et déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 – Systèmes d'équations linéaires

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants, si cela est possible, en calculant la matrice inverse :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 6y - 3x = 5 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 10 Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants en utilisant la méthode de Gauss.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - y + 5z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ x + 2y - 7z = 1 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 11 – Combinaisons linéaires de vecteurs de \mathbb{R}^3 On note $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- Exprimer le vecteur $\vec{E} = (5, 2, 1)$ de \mathbb{R}^3 comme combinaison linéaire de \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 .
- Le vecteur $\vec{E} = (5, 2, 1)$ de \mathbb{R}^3 peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire des trois vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, 0)$?
- Montrer que les vecteurs $\vec{E} = (0, 6, 1)$ et $\vec{F} = (5, 4, -1)$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{u} = (1, 2, 0)$ et $\vec{v} = (-3, 0, 1)$. Montrer que le vecteur $\vec{G} = (4, 2, 0)$ ne l'est pas.

Exercice 12 – Bases de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3

- Les vecteurs $\vec{u} = (1, 1)$ et $\vec{v} = (1, -1)$ forment-ils une base de \mathbb{R}^2 ?
Autrement dit, peut-on écrire tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ comme combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} ?
- Les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, 0)$ forment-ils une base de \mathbb{R}^3 ?

Exercice 13 – Produit scalaire et vecteurs orthogonaux dans le plan

Dans le plan cartésien, dessiner les deux vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

- Calculer les normes $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Calculer et dessiner le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ et les deux vecteurs \vec{u}^\perp orthogonaux à \vec{u} et de même norme.

Exercice 14 – Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte dans l'espace

Dans l'espace cartésien, on considère les trois vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, et $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

- Calculer les normes $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ et le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Calculer et dessiner les vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{u}$, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.
- Calculer le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exercice 15 – Transformations linéaires et matrices

Parmi les applications suivantes, trouver celles qui sont linéaires et justifier votre réponse (calculer $f(a\vec{u} + b\vec{v})$ et $af(\vec{u}) + bf(\vec{v})$ dans les premiers deux cas). Pour les applications linéaires, déterminer leur matrice associée.

- | | |
|--|--|
| a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y)$ | f) $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (2x, 0, -3x)$ |
| b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - 5y$ | g) $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + 2z, y - z - x)$ |
| c) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto (2u + 3v, u - 5v)$ | h) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (1 - v, 2u, 3v - 4)$ |
| d) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, \theta) \mapsto t \sin \theta$ | i) $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v, w) \mapsto (w - v, 2u, 3v - 4w)$ |
| e) $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, \theta) \mapsto 3t + \theta$ | |

Calculer les composées $f \circ h$, $h \circ f$, $G \circ f$, $h \circ L$ et $L \circ Q$.

Exercice 16 – Isomorphismes, isométries, rotations, réflexions et projections

Parmi les transformations linéaires associées aux matrices suivantes, indiquer lesquelles sont des isomorphismes, des isométries, des rotations, des réflexions ou des projections sur une droite :

- | | | |
|--|--|---|
| a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ | d) $D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ | g) $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | e) $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ | h) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | f) $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ | i) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |

TD 4 – GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE DANS LE PLAN

Dans le plan, on fixe un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) et on note (x, y) les coordonnées d'un point générique.

Exercice 17 – Distance et droites

Dans le plan, dessiner les deux points $A(1, 3)$ et $B(-1, 0)$.

- Calculer la distance entre A et B .
- Dessiner la droite Δ passant par A et B , et déterminer son équation.
- Dessiner la droite parallèle à Δ passant par O , et déterminer son équation.
- Dessiner la droite orthogonale à Δ passant par O , et déterminer son équation.

Exercice 18 – Distance, projection orthogonale et droites

Dans le plan, dessiner le point $A(5, 3)$ et la droite Δ d'équation $x - y + 1 = 0$.

- Calculer la distance du point A à la droite Δ .
- Dessiner et trouver la projection orthogonale de A sur Δ .
- Dessiner la droite parallèle à Δ passant par A , et déterminer son équation.
- Dessiner la droite perpendiculaire à Δ passant par A , et déterminer son équation.

Exercice 19 – Aire de parallélogramme

Dessiner les points $A(2, 5)$, $B(8, -1)$ et $C(10, 5)$ du plan. Déterminer le point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme et calculer l'aire de celui-ci.

Exercice 20 – Coniques

Décrire et dessiner les coniques suivantes, ainsi que leurs axes de symétrie ou leurs asymptotes :

- | | | |
|---------------------|------------------------|---------------------------------|
| a) $x^2 - 4y^2 = 1$ | c) $x = (y - 1)^2 + 1$ | e) $(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 9$ |
| b) $x^2 + 4y^2 = 1$ | d) $xy = 3$ | f) $y = x^2 + 3$ |

Exercice 21 – Droites ou coniques ?

Dire si les équations cartésiennes suivantes décrivent des droites ou des coniques (lesquelles?).

- | | | |
|--------------------------|----------------------|-------------------|
| a) $2x - 3y + 1 = 0$ | d) $(x - 1)^2 = y^2$ | g) $(x + 1)y = 5$ |
| b) $x = 2$ | e) $2x^2 + 3y^2 = 1$ | h) $y = x^2 + 2x$ |
| c) $(x - 1)^2 + y^2 = 7$ | f) $2x^2 - 3y^2 = 1$ | i) $x = 2y^2 - 3$ |

Exercice 22 – Lieux de points dans le plan complexe

Déterminer l'ensemble des points P du plan, d'affixe $z \in \mathbb{C}$, tels que :

- | | | |
|---|---|---|
| a) $z^2 + 2z - 3 \in \mathbb{R}$ | e) $\frac{2z - 4}{z - i} \in \mathbb{R}$ | i) $\left \frac{z - 3}{z - 5} \right = 1$ |
| b) $ 1 - z \leq 1/2$ | f) $ (1 - i)z - 3i = 3$ | j) $\left \frac{z - 3}{z - 5} \right \leq \sqrt{2}$ |
| c) $\operatorname{Re}(1 - z) \leq 1/2$ | g) $\operatorname{Re}(iz) \leq 1/2$ | |
| d) $\left \frac{z - 3}{z + 3} \right < 2$ | h) $\left 1 - \frac{1}{z} \right ^2 = 2$ | |

TD 5 – GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE DANS L'ESPACE

Dans l'espace, on fixe un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note (x, y, z) les coordonnées d'un point générique.

Exercice 23 – Distance et plans

Dans l'espace, dessiner le point $A(1, 2, 3)$.

- Calculer la distance de A à l'origine O .
- Dessiner le plan passant par A et orthogonal au vecteur $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$, et écrire son équation.
- Dessiner le plan passant par A et parallèle au plan $3x - 2y + 4z - 5 = 0$, et écrire son équation.
- Dessiner le plan passant par A , $B(3, -2, 1)$ et $C(5, 0, -4)$, et écrire son équation.

Exercice 24 – Distance, plans, droites et volume d'un parallélépipède

Dans l'espace, dessiner les trois points $A = (0, 1, 2)$, $B = (-1, 0, 1)$ et $C = (1, 1, 0)$.

- Déterminer l'équation du plan π passant par les points A , B , C et l'intersection de π avec les trois axes. Dessiner le plan et les points.
- Calculer la distance au plan π de l'origine O et la projection orthogonale de O sur π ;
- Déterminer une équation paramétrique de la droite Δ passant par A et dirigée par le vecteur \overrightarrow{BC} , et l'intersection $\pi \cap \Delta$. Dessiner la droite et le point d'intersection.
- Dessiner le parallélépipède engendré par les trois vecteurs \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} et \overrightarrow{OC} , et calculer son volume.

Exercice 25 – Longueur d'un segment

Déterminer la longueur de la diagonale du cube unité de \mathbb{R}^3 de deux manières différentes :

- géométriquement, en utilisant deux fois Pythagore ;
- analytiquement, en utilisant la distance dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 26 – Quadriques

Décrire et dessiner les quadriques suivantes :

- | | | |
|--------------------------|----------------------|---------------------------------|
| a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ | c) $z = x^2 + y^2$ | e) $(y - 1)^2 + 4(z + 2)^2 = 9$ |
| b) $x^2 + y^2 = 4$ | d) $z^2 = x^2 + y^2$ | f) $y = x^2 + 3$ |

Exercice 27 – Droites, coniques, plans ou quadriques ?

Dire si les équations cartésiennes suivantes décrivent des droites, des coniques, des plans ou des quadriques (lesquelles ?).

- | | | |
|---|---|--|
| a) $2x - 3y - z + 1 = 0$ | f) $(x - 1)^2 + y^2 = 7$ | k) $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 = 1$ |
| b) $y = 2$ | | |
| c) $\begin{cases} 2x - 3y - z + 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ | g) $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 7 \\ z = 2 \end{cases}$ | l) $z = 2x^2$ |
| d) $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 7$ | h) $(x - 1)^2 = y^2$ | m) $\begin{cases} z = 2x^2 \\ y = 2 \end{cases}$ |
| e) $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 7 \\ y = 2 \end{cases}$ | i) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$ | |
| | j) $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 1$ | n) $z = 2x^2 + 3y^2$ |

Exercice 28 – Graphe des fonctions élémentaires

À partir du graphe des fonctions élémentaires donné en cours, dessiner le graphe des fonctions réelles suivantes en précisant le domaine de définition. Indiquer celles qui sont strictement croissantes ou strictement décroissantes.

a) $f(x) = 2x^2 - 3$

e) $u(\theta) = 2 \sin \theta - 1$

i) $F(y) = 2 \arcsin(y)$

b) $g(y) = \frac{1}{y} + 5$

f) $y(x) = e^{2x}$

j) $G(z) = \arctan(z) + 5$

c) $h(z) = 1 - \sqrt{z}$

g) $z(u) = \ln(u - 1)$

k) $H(x) = \ln(3x)$

d) $\Phi(t) = t^3 + 1$

h) $p(x) = \frac{2}{x - 1}$

l) $x(t) = \cos(2t)$

Exercice 29 – Fonctions composées

En utilisant les fonctions de l'exercice 28, calculer les fonctions composées suivantes :

a) $f(g(y))$

c) $g(z(u))$

e) $h(H(x))$

g) $h(g(y(x)))$

b) $g(f(x))$

d) $z(g(y))$

f) $H(h(z))$

h) $g(H(p(x)))$

Exercice 30 – Fonctions réciproques

Calculer la réciproque des fonctions de l'exercice 28.

Exercice 31 – Réciproque des fonctions circulaires

Calculer les valeurs suivants :

a) $\arcsin(1/2)$

c) $\arctan(\sqrt{3}/3)$

e) $\arcsin(\sin(2\pi/3))$

g) $\sin(\arcsin(\sqrt{2}/\sqrt{5}))$

b) $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$

d) $\arctan(-1)$

f) $\arctan(\tan(9\pi/4))$

h) $\tan(\arctan 3)$

Exercice 32 – Équations et systèmes

Résoudre les équations et les systèmes suivants :

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $3u^2 - 5u - 2 = 0$

c) $x^2 - 5x + 4 = 0$

d) $x(x + 1) = 0$

e) $y^2(y^2 - 4) = 0$

f) $\frac{1}{2t} - 1 = t$

g) $\cos 4x = \sin 7x$

h) $\cos^2 \theta = 1/4$

i) $\sin(2t) = \cos^2 t$

j) $\sin(\pi x) = 0$

k) $\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$

l) $\arctan y = \frac{2\pi}{3}$

m) $\arcsin x + \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{4}$

n) $e^{4-3x^2} = 1$

o) $e^{2-3u} = 5$

p) $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$

q) $\operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x = 1$

r)
$$\begin{cases} x(y+1) = 0 \\ y^2(x^2-4) = 0 \end{cases}$$

s)
$$\begin{cases} (x-1)(y^2-1) = 0 \\ xy(x-y) = 0 \end{cases}$$

t)
$$\begin{cases} x+y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases}$$

u)
$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 3 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \end{cases}$$

Exercice 33 – Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

b) $u^2 > 4$

c) $\frac{1}{2x} - 1 \geq 0$

d) $x(x-2)(x^2-1) < 0$

e) $\sin(2y) < 0$

f) $\cos^2 \theta \geq 1/4$

g) $\arcsin x \geq 1/2$

h) $x \arctan x \leq 0$

i) $e^{3x^2} > 1$

j) $(3-x) \ln x > 0$

k) $\ln u \leq 1$

l) $\ln(\ln t) \geq 0$

Exercice 34 – Domaine de définition

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

b) $g(y) = \sqrt{y^3 - 8} + \sqrt{y^3 + 8}$

c) $h(z) = \ln(z + 5)$

d) $\Phi(t) = \ln \sqrt{t^2 - 4}$

e) $u(\theta) = \frac{1}{\sin \theta}$

f) $y(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

g) $z(u) = \ln(\tan u)$

h) $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$

i) $F(y) = \ln(1 - y^2)$

j) $G(z) = \arcsin \frac{2z}{1+z^2}$

k) $H(x) = \arctan(x) + 5$

l) $x(t) = \sqrt{\cos t}$

Exercice 35 – Dérivées avec la règle de Leibniz

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant la règle de Leibniz pour les produits et les quotients :

a) $f(x) = x^2 e^x$

f) $g(x) = 2x\sqrt{x}$

k) $h(x) = x \sin x + \cos x$

b) $f(y) = \frac{1}{y^3}$

g) $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$

l) $h(y) = \frac{\sin y}{y^3}$

c) $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z + 1}$

h) $g(z) = \frac{1}{\ln(z)}$

m) $h(z) = z^2 \arcsin(z)$

d) $f(t) = \frac{t - 1}{t^2 + 1}$

i) $g(t) = \frac{\ln t}{t} + \frac{t}{e^t}$

n) $h(t) = \frac{\arctan(t)}{1 + t^2}$

e) $f(u) = \frac{u^4(u - 1)}{u^2 + u^3}$

j) $g(u) = u^2 \ln(u)e^u$

o) $h(u) = \operatorname{sh}(u)\operatorname{ch}(u)$

Exercice 36 – Dérivées avec la règle de la chaîne

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant la règle de la chaîne pour les fonctions composées :

a) $f(x) = (x^2 + 3x - 1)^5$

e) $g(x) = e^{x^3 + 2x + 1}$

i) $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $f(y) = \frac{1}{(y^3 + 1)^5}$

f) $g(y) = \ln(2y^2 + 1)$

j) $h(y) = \arcsin(y^2 + y)$

c) $f(z) = \sqrt{z^2 - 3z + 1}$

g) $g(z) = \ln\left(\frac{2z}{z^2 + 1}\right)$

k) $h(z) = \arcsin \sqrt{z + 1}$

d) $f(t) = \sqrt{\sin t}$

h) $g(t) = \ln(\ln t)$

l) $h(t) = \left(\frac{t}{1 - \sqrt{1 - t^2}}\right)^2$

Exercice 37 – Dérivées avec toutes les règles

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant la règle de Leibniz et celle de la chaîne :

a) $f(x) = x^2 \sqrt{1 + x^2}$

d) $x(t) = 2t \ln(\sqrt{2t})$

g) $F(u) = u \tan(u^2 + 1)$

b) $g(y) = \frac{\sqrt{1 + y}}{1 + \sqrt{y}}$

e) $y(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

h) $G(v) = v \arcsin v + \sqrt{1 - v^2}$

c) $h(z) = \frac{z}{z - \sqrt{1 + z^2}}$

f) $z(y) = \frac{e^{\sin y}}{\cos y}$

i) $H(\theta) = \arcsin(2\theta^2 - 1)$

TD 9 – POINTS CRITIQUES, EXTREMA LOCAUX ET POINTS D'INFLÉXION

Exercice 38 – Extrema locaux

Déterminer les extrema locaux (minimum et maximum locaux) des fonctions f ci-dessous (toutes dérivables), s'il y en a, en suivant la procédure suivante :

- Trouver le domaine de définition de la fonction.
- Calculer la dérivée f' .
- Trouver les points critiques.
- Trouver le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations en indiquant où la fonction est strictement croissante ($f'(x) > 0$) ou strictement décroissante ($f'(x) < 0$).
- Parmi les points critiques, trouver les extrema locaux (minimum et maximum) et calculer la valeur de f correspondante.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{3 + x^2}$

e) $f(x) = \ln(1 - x^2)$

b) $f(x) = x^4 + 2x^3$

d) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

f) $f(x) = \sin(x^2)$

Exercice 39 – Points d'inflexion, convexité et concavité

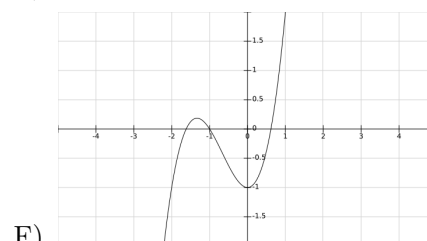
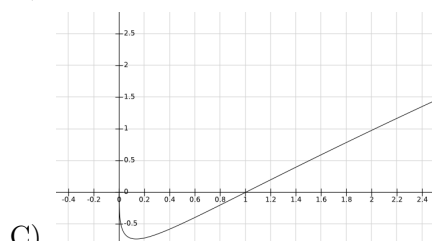
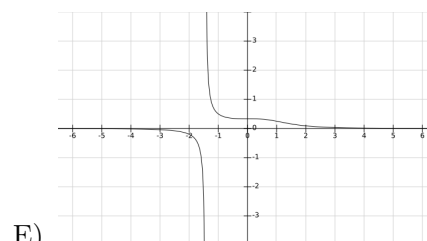
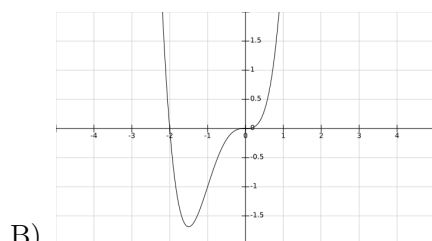
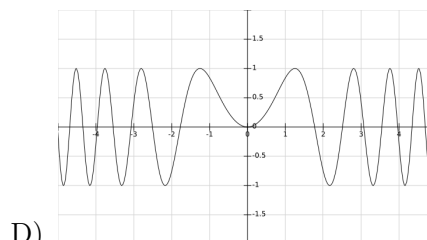
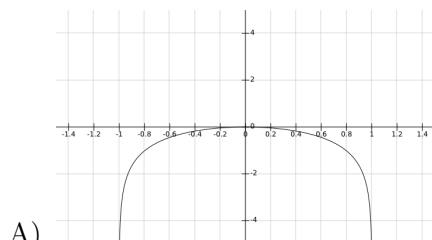
Déterminer les points d'inflexion des fonctions de l'exercice 38, s'il y en a, en procédant comme suit :

- Calculer la dérivée seconde f'' .
- Trouver les points où f'' s'annule.
- Parmi ceux-ci, trouver les points d'inflexion (autour desquels $f'(x)$ ne change pas de signe).

N.B. On peut profiter de ces calculs pour vérifier la nature des points critiques : en un minimum local la fonction est convexe ($f''(x) > 0$), en un maximum local la fonction est concave ($f''(x) < 0$).

Exercice 40 – Graphe de fonctions

Indiquer, parmi les fonctions de l'exercice 38, laquelle correspond à chacun des graphes suivants :



Exercice 41 – Polynôme de Taylor

En utilisant la formule de Taler-Young (avec reste négligeable), trouver le polynôme de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes, autour des points indiqués :

- a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$
- b) $f(x) = \sin(3x)$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = \frac{\pi}{2}$
- c) $f(x) = e^{2x}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$
- d) $f(x) = \operatorname{ch}(2x)$ autour de $x_0 = 0$
- e) $f(x) = \ln(1+2x)$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$
- f) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$
- g) $f(x) = \cos^2 x$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = \frac{\pi}{2}$
- h) $f(x) = \sqrt{1 + \arcsin x}$ autour de $x_0 = 0$

Exercice 42 – Valeur approchées

En utilisant les polynômes de Taylor trouvés dans l'exercice 41, calculer les valeurs approchées suivantes, à l'ordre 1 et 2 :

- a) $\frac{1}{1+10^{-2}}$
- b) $e^{1/10}$
- c) $\ln(1+2/100)$
- d) $\cos^2(10^{-3})$

Exercice 43 – Formule de Taylor-Lagrange et approximations (Facultatif)

En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer les inégalités suivantes pour tout $x \geq 0$, et répondre aux questions d'approximation.

- a) $\sin x \leq x$
- b) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Pour quelles valeurs de $x \geq 0$ peut-on dire que $1 - \frac{x^2}{2}$ est une approximation de $\cos x$ à 10^{-2} près, c'est-à-dire que $\left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \right| \leq 10^{-2}$?

- c) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$
- d) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Pour quelles valeurs de $x \geq 0$ peut-on dire que $x - \frac{x^2}{2}$ est une approximation de $\ln(1+x)$ à 10^{-3} près ?

Exercice 44 – Primitives élémentaires

À l'aide d'un tableau de dérivées des fonctions élémentaires, calculer les primitives suivantes :

a) $\int (x^5 + 3x^3 + x^2) dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

i) $\int \sin(3\theta) d\theta$

b) $\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} \right) dy$

f) $\int (5e^t + 2e^{-t}) dt$

j) $\int \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta$

c) $\int \frac{1}{1+y^2} dy$

g) $\int (e^{5t} + e^{-2t}) dt$

k) $\int \operatorname{sh}(2x) dx$

d) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{u\sqrt{u}} \right) du$

h) $\int (\sin \theta - \cos \theta) d\theta$

l) $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx$

Exercice 45 – Intégration par partie

Calculer les primitives suivantes par partie :

a) $\int x e^{-x} dy$

d) $\int \cos^2 x du$

g) $\int \sin(\ln x) dx$

b) $\int (x^2 + 5x + 6) \sin x dx$

e) $\int \ln x dt$

h) $\int \sin(3x) \cos(5x) dx$

c) $\int e^x \cos x dx$

f) $\int x^2 \ln x du$

i) $\int \arctan x dx$

Exercice 46 – Intégration par changement de variable

Calculer les primitives suivantes en effectuant le changement de variable indiqué :

a) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \quad (x = \frac{1}{t})$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx \quad (u = e^{-x})$

b) $\int \frac{1}{e^x+1} dx \quad (x = -\ln t)$

e) $\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx \quad (u = \sqrt{1+x^3})$

c) $\int x(5x^2-3)^7 dx \quad (u = 5x^2-3)$

f) $\int \frac{1}{3+2\cos x} dx \quad (t = \tan \frac{x}{2})$

Exercice 47 – Primitive des fractions rationnelles

Calculer les primitives suivantes par changement de variable :

a) $\int \frac{1}{2x+1} dx$

e) $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx$

j) $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$

b) $\int \frac{1}{(x-1)^2} dx$

f) $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$

k) $\int \frac{x}{(x+1)^3} dx$

c) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$

g) $\int \frac{1}{4+9x^2} dx$

l) $\int \frac{x^3-2x}{x+1} dx$

d) $\int \frac{1}{x^2+1} dx$

h) $\int \frac{1}{x^4+1} dx$

m) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$

i) $\int \frac{1}{x^4+x^2+1} dx$

Exercice 48 – Intégrales

Calculer les primitives ou intégrales suivantes par changement de variable :

a) $\int \sin^4 x \cos x dx$

h) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

o) $\int (x+2) \sin(x^2+4x-6) dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$

i) $\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} dx$

p) $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} dx$

c) $\int \tan x dx$

j) $\int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx$

q) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$

d) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

k) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

r) $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{4x+2}} dx$

e) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x + \sin x} dx$

l) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

s) $\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx$

f) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

m) $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

t) $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$

g) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$

n) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$

u) $\int \frac{1}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} dx$

Exercice 49 – Équations différentielles du 1er ordre linéaires

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $f'(t) = 0$

b) $g'(t) = t^3$

c) $x'(t) = x(t) + t$

d) $y'(t) + y(t) = t^2$

e) $z'(t) = t z(t)$

f) $(1 + t^2) u'(t) + t u(t) = 2t^2 + 1$

g) $t^2 x'(t) = x(t)$

h) $f'(t) - \frac{1}{2t} f(t) = \frac{t+1}{t}$

i) $(1 + t^2) z'(t) + z(t) = 0$

j) $\cos t x'(t) + \sin t x(t) = 1$

k) $2z'(t) = 3z(t)$

l) $t y'(t) + 2y(t) = t^2 - 3$

m) $x'(t) - \frac{2}{t+1} x(t) = (t+1)^3$

n) $u'(t) + 2u(t) = 0$

o) $t^3 g'(t) + t^2 g(t) = t$

Exercice 50 – Équations différentielles du 1er ordre avec condition initiale

Résoudre les équations différentielles suivantes et trouver l'unique solution qui vérifie la condition initiale donnée :

a) $\begin{cases} t x'(t) = 2x(t) + t^3 \\ x(1) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sin t y'(t) = y(t) \\ y(\frac{\pi}{2}) = 3 \quad \text{et} \quad y(-\frac{\pi}{2}) = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} z'(t) - \frac{2}{t} z(t) = t^2 e^t \end{cases}$

d) $\begin{cases} t u'(t) - t u(t) = e^t \end{cases}$

Exercice 51 – Équations différentielles du 1er ordre non linéaires

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $r'(t) = \frac{1}{r(t)}$

b) $z'(t) = z^2(t)$

c) $r'(t) = \frac{1}{r^2(t)}$

d) $x'(t) = e^t e^{x(t)}$

e) $y'(t) = t (y^2(t) - 1)$

f) $t z'(t) + z^2(t) = 0$

Exercice 52 – Équations différentielles du 2ème ordre à coefficients constants

a) $f''(t) = 0$

b) $g''(t) = t^3$

c) $x''(t) + x'(t) = 0$

d) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t + 1$

e) $z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^t + t$

f) $u''(t) + u'(t) - 2u(t) = \sin t$

g) $x''(t) + x'(t) + x(t) = 0$

h) $f''(t) + f(t) = \cos^2 t$

i) $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0$

j) $u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) = 0$

k) $g''(t) - 2g'(t) + 5g(t) = 10 \cos t$

l) $z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^{-t}$

m) $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = \sin(2t)$

n) $u''(t) + 2u'(t) - 5u(t) = 0$

Exercice 53 – Équations différentielles du 2ème ordre avec conditions initiales

Résoudre les équations différentielles suivantes et trouver l'unique solution qui vérifie la condition initiale donnée :

a)
$$\begin{cases} f''(t) + f'(t) - 12f(t) = 0 \\ f(2) = 2 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 4t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u''(t) + 9u(t) = 0 \\ u(\pi/2) = 0 \\ u'(\pi/2) = 3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$