Produit scalaire. Espaces Euclidiens.

.

1.. Définition. Un **espace euclidien** est un R-espace de dimension finie muni d'un **produit scalaire** $< .,. >: E \times E \to R$, vérifiant:

1) $< u,v >$ est bilinéaire: $< a_1u_1 + a_2u_2, v >= a_1 < u_1, v > +a_2 < u_2, v >$, pareille pour v.

2) symétrie: $< u,v >=< v,u >$ pour tous $u,v \in E$

3) positivité: $< u,u >> 0$ si $u \neq 0$.

.

Lorsque $< u,v >= 0$, on dit que u et v sont **orthogonaux.**

.

2. Norme. La **norme euclidienne** associée est définie par

$$\| u \|= \sqrt{< u,u >}$$

On a les propriétés suivantes:

1) $\| u \|= 0$ si et seulement si $u = 0$;

2) $\| \lambda u \|=| \lambda |\| u \|$;

On a **l'inégalité de Cauchy-Schwartz:** $| < x,y > | \leq \| x \|\| y \|$.

Cela entraine l'inégalité triangulaire:

3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

.

Le produit scalaire est déterminé par la norme:

$< x,y >= \frac{1}{4}(\| x + y \| - \| x - y \|)$ ("identité de polarisation").

.

La distance euclidienne d sur E est définie par $d(x,y) =\| x - y \|$.

.

Exemples: 1. Produit scalaire canonique dans R^n: $< x,y >= \sum_1^n x_iy_i$.

La norme est donnée par le "théorème de Pythagore": $\| x \|^2= \sum_1^n x_i^2$.

.

2. $E = C([a,b], R)$, $< f,g >= \int_a^b f(t)g(t)dt$.

.

3. Deux vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $< x,y >= 0$.

Sous-espace orthogonale. Soit $A \subset E$; **l'orthogonal** de A est l'ensemble de vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A:

$A^\perp = \{x \in E : \forall y \in A \text{ on a } < x,y >= 0\}$.

Il est claire que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Deux sous-espaces E_1 et E_2 sont **orthogonaux** si tout vecteur de E_1 est orthogonal à tout vecteur de E_2 ($E_2 \subset E_1^\perp$).

Famille orthogonale. Une famille de vecteurs de E est dite **orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont deux à deux orthogonaux.

Une famille de vecteurs de E est dite **orthonormale** si elle est orthogonales et tous ses vecteurs sont de norme 1.

Lemme. Une famille orthogonale sans vecteurs nuls est libre.

.

3. Coordonnées dans une base orthonormale.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale, soit $x = \sum_1^n x_i e_i$, $y = \sum_1^n y_i e_i$. Alors $< x, y >= \sum_1^n x_i y_i$, $\| x \|^2 = \sum_1^n x_i^2$ ("théorème de Pythagore") et $x_i =< x, e_i >$.

.

Exemple: séries de Fourier. Avec le produit scalaire $< f, g >= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ dans $C([0, 2\pi])$ la famille $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos nt, \sin nt)_{n\geq 1}$ est orthonormale; les combinaisons linéaires des ses fonctions - les polynômes trigonométriques - sont denses dans $C([0, 2\pi])$. Soit $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)dt$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)dt$. On a l'égalité de Parseval (Pythagore):

$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.

.

4. Orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Soit $(v_1, ..., v_n, ...)$ une famille libre dans E. On peut construire une famille orthonormale $e_1, ..., e_n, ...$ telle que $Vect(e_1, ..., e_k) = Vect(v_1, ..., v_k)$ pour tout $k \geq 1$. (Autrement dit, e_k est une combinaison linéaire de $v_1, ..., v_k$.)

Construction par récurrence:

On pose $e_1 = \frac{v_1}{\|v_i\|}$; $\tilde{e}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_1^k < v_{k+1}, e_i > e_i$ et $e_{k+1} = \frac{\tilde{e}_{k+1}}{\|\tilde{e}_{k+1}\|}$.

Corollaire. Tout espace Euclidien admet une base orthonormale. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

.

5. Projection orthogonale.

Soit $F \subset E$ un sous-espace de dimention finie.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de F.

On définit $P_F : E \to E$ par $P_F(x) = \sum_1^n < x, e_i > e_i$. Alors P_F est un projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Corollaire. Si F est un sous-espace de dimension finie, $F^\perp$ est un supplémentaire de F: $E = F \bigoplus F^\perp$, somme directe orthogonale. On a aussi $(F^\perp)^\perp = F$.

Projection orthogonale dans une base quelconque.

Le vecteur $y = P_F(x)$ est caractérisé par les conditions $y \in F$ et $< y, z >=< x, z >$ pour tout vecteur z de F.

Soit $(v_1, ..., v_n)$ une base de F. Pour que $< y, z >=< x, z >$ pour tout vecteur z de F il suffit que $< y, v_i >=< x, v_i >$, $i = 1, ..., n$.

Posons $P_F(x) = \sum_1^n x_i v_i$; pour déterminer les coefficients x_i on doit résoudre le système:

$\sum_1^n x_i < v_i, v_j >=< x, v_j >$, $j = 1, ..., n$.

La matrice de ce système $G = (< v_i, v_j >)$ s'appelle *matrice de Gram.* Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale et $A = (a_{ij}) = (<_i, v_j >)$, alors $G =^t AA$. En particulier, dét G= (dét $A)^2$.

.

6. Projection othogonale et la meilleure approximation en moyenne quadratique. Distance à un sous-espace.

Lemme. Soit F est un sous-espace de dimension finie et $x \in E$. Alors la projection $P_F(x)$ réalise la distance minimale entre x et les vecteurs de F: $\| x - P_F(x) \| = \min \{\| x - z \|, z \in F\}$.

.

Exemple. Ajustement affine.

Soit $x_1 < x_2 < ... < x_n$ et $S = (x_1, ..., x_n)$.

Soit E l'espace des fonctions définies sur S à valeurs réelles.

Le produit scalaire dans E est défini par $< f, g >= \sum_1^n f(x_i)g(x_i)$;

Etant donné f, *l'ajustement affine par les moindres carrés* consite à déterminer une fonction affine $\phi(x) = ax + b$ telle que l'écart $\| f - \phi \|^2 = \sum_1^n [f(x_i) - \phi(x_i)]^2$ soit minimal.

La réponse est donnée par la projection orthogonal sur le sous-espace des fonctions affines. Les coefficients a et b sont les solutions du système linéaire: $< \phi, 1 >=< f, 1 >$, $< \phi, x >=< f, x >$. Plus explicitement,

$na + (\sum x_i)b = \sum f(x_i)$,

$(\sum x_i)a + (\sum x_i^2)b = \sum x_i f(x_i)$.

.

Exemple. Meilleure approximation en moyenne quadratique par des polynômes trigonométriques.

Un polynôme trigonométrique de dégré $\leq n$ est la somme $p(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$. Soit $f \in C([0, 2\pi])$ une fonctionn continue. On cherche on polynôme trigonométrique p de degré $\leq n$ tel que l'écart $\int_0^{2\pi} (f(t) - p(t))^2 dt$ soit minimal.

La réponse est donnée par la projection orthogonal dans $C([0, 2\pi])$ sur le sous-espace des polynômes trigonométriques de dégré $\leq n$; le produit scalaire est $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. Les coefficients du polynôme $p(t)$ sont: $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt$, $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)dt$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)dt$.

.

Endomorphisme adjoint.

Soit f un endomrphisme de l'espace Eclidien E.

Alors il existe un unique endomorphisme f^*, appellé endomrphisme adjoint, tel que $< f^*(u), v >=< u, f(v) >$.

Dans une base orthonormale B la matrice de f^* est la transposée de la matrice de f: $(f^*)_B = (f_B)^t$.

Un endomorphisme f de E est dit auto-adjoint ou symétrique si $f^* = f$, donc si $< f(u), v >=< u, f(v) >$ quelque soit les vecteurs u et v.

Dans une base orthonormale il lui correspond une matrice $A = (a_{ij})$ **symétrique** $A = A^t$, c'est à dire $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous i, j.

.

Proposition. Les valeurs propres d'un endomorphisme symétrique sont réelles. Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale.

.

Isométries. Une application linéaire $f : E \to E$ est une **isométrie** (appelée aussi transformation orthogonale) de E si f préserve les normes: pour tout $u \in E$ on a $\| f(u) \|=\| u \|$.

.

Proposition. 1. $f : E \to E$ est une isométrie si et seulement si f préserve le produit scalaire: $< f(u), f(v) >=< u, v >$

2. f est une isométrie si et seulement si $f^*f = ff^* = Id$, donc ssi $f^* = f^{-1}$.

3. f est une isométrie si et seulement si f transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

4. f est une isométrie si et seulement si sa matrice A dans une base orthonormale est **ortogonale**: $AA^t = A^tA = \mathbf{1}$.

5. Soit B une base orthonormale et B' une base quelconque. B' est une base orthonormale si et seulement si la matrice de passage de B vers B' est orthogonale.

.

Proposition. Toutes les valeurs propres d'une isométrie sont de module 1. Toute isométrie est diagonalisble dans $\mathbf{C}^n$.

.

Formes quadratiques.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, et $x = \sum_i x_i e_i \in E$.

Une forme quadratique dans E est la fonction $Q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_i$ avec une matrice A symétrique: $a_{ji} = a_{ij}$.

Si la base B est orthonormale, on a $Q(x) =< Ax, x >$.

Par un changement de base, $x = Py$, on écrit la même forme dans les nouvelles coordonnées: $Q(x) =< APy, Py >=< P^t APy, y >=< A'y, y >$.

Diagonaliser la forme signifie trouver un changement de base P tel que la matrice $A' = P^t AP$ soit diagonale: $A' = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Dans ce cas $Q(x) = \sum_i \lambda_i y_i^2$.

La nouvelle base est orthonormale si et seulement si la matrice P est orthogonale: $P^t = P^{-1}$. Dans ce cas, $A' = P^{-1}AP$ et il s'agit de diagonaliser la matrice symétrique A.

Proposition. Toute forme quadratique peut être "diagonalisée" par un changement orthogonal de coordonnées ("réduction aux axes principaux").