

Réduction des endomorphismes.

Diagonalisation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K et f un endomorphisme de E . Le but de réduction est de chercher des bases dans E dans lesquelles la forme de la matrice associée à f est la plus simple possible. Si f est déjà donné par une matrice $A = f_B$ dans une base B , il s'agit de passer à une autre base B' de façon à ce que la nouvelle matrice $A' = f_{B'} = P^{-1}AP$ soit "simple".

La forme la plus simple d'une matrice est la forme diagonale.

1.1. Définition: Un endomorphisme est **diagonalisable** si il admet une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice est diagonalisable si il y a un changement de base qui rend la matrice diagonale.

Vecteurs propres, valeurs propres

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ alors $f_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ signifie que $f(e_i) = \lambda_i e_i, i = 1, \dots, n$.

1.2. Définition: Un **vecteur propre** de f est vecteur **non-nul** v tel que $f(v)$ est colinéaire à v : $f(v) = \lambda v$; le coefficient de proportionalité λ est la **valeur propre** associée. Un scalaire λ est une **valeur propre** de f s'il existe un vecteur non-nul v tel que $f(v) = \lambda v$.

En termes d'une matrice : $Av = \lambda v$.

La matrice de l'endomorphisme dans une base de vecteurs propres est diagonale, avec les valeurs propres sur la diagonale principale.

En termes d'une matrice : $Av = \lambda v$.

Une reformulation de la définition de la diagonalisabilité:

1.1bis. Définition: Un endomorphisme est **diagonalisable** si il existe une base de vecteurs propres.

L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle **spectre** de f .

Remarque. Si v est un vecteur propre, tout vecteur non-nul colinéaire à v est aussi un vecteur propre (avec la même valeur propre).

1.3. Théorème. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants.

• • *Démonstration.* Soit $f(v_i) = \lambda_i v_i, i = 1, \dots, n$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

On procède par récurrence: supposons que la famille v_1, \dots, v_k est libre, on va montrer que v_1, \dots, v_k, v_{k+1} est libre. Soit

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i v_i = 0 \quad (*)$$

une relation linéaire entre v_1, \dots, v_k, v_{k+1} . Appliquons f à cette relation:

On a $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i f(v_i) = 0$, donc

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \lambda_i v_i = 0 \quad (**)$$

On multiplie l'égalité (*) par λ_{k+1} :

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \lambda_{k+1} v_i = 0 \quad (***)$$

et on soustrait (**) de (***). Cela donne

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (\lambda_{k+1} - \lambda_i) v_i = 0$$

On note que $\lambda_{k+1} - \lambda_i \neq 0$. Donc (hypothèse de récurrence) $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, k$. Donc aussi $\alpha_{k+1} = 0$. Donc la famille v_1, \dots, v_k, v_{k+1} est libre. •

•

.

1.4. Corollaire. Soit $n = \dim(E) < \infty$. Alors

1. f admet au plus n valeurs propres.

2. Si f admet exactement n valeurs propres (deux à deux distinctes), f est diagonalisable.

• • *Démonstration.*

1. Le nombre de vecteurs de E linéairement indépendants ne dépasse pas la dimension de E .

2. Les n vecteurs propres associés sont linéairement indépendants et donc forment une base de E . • •

.

A la recherche des vecteurs propres: polynôme caractéristique.

On remarque que λ est une valeur propre si et seulement si l'équation $(A - \lambda Id)v = 0$ admet des solutions v non-nulles. Cette condition est équivalente à l'annulation du déterminant de la matrice $(A - \lambda Id)$:

$\det(A - \lambda Id) = 0$. C'est l'**équation caractéristique** pour les valeurs propres.

.

1.5. Définition. Le déterminant $p_A(x) = \det(A - xId)$ s'appelle **polynôme caractéristique** de A : c'est un polynôme en x de degré n .

.

On conclut que **les valeurs propres sont précisément les racines du polynôme caractéristique.**

[Parfois on définit le polynôme caractéristique comme

$$\det(xId - A) = (-1)^n p_A(x).]$$

.

Les matrices semblables A et $P^{-1}AP$ ont le même polynôme caractéristique.

.

Remarque: on a $p_{A+aId}(x) = p_A(x-a)$. Si f est diagonalisable, $A+aId$ l'est aussi ($a \in K$); les valeurs propres de $A+aId$ s'obtiennent en ajoutant a aux valeurs propres de A .

1.6. Polynôme caractéristique d'une matrice diagonale: si

$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $p_A(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

Donc une condition nécessaire pour que A soit diagonalisable est que p_A soit scindé (vérifiée automatiquement si $K = \mathbf{C}$). Voici une condition suffisante:

1.7. Corollaire. Si $p_A(x)$ admet n racines distinctes (donc p_A est scindé à racines simples), A est diagonalisable.

• • *Démonstration.* Voir le Corollaire 1.4. • •

Remarque: Un polynôme "générique" n'a pas de racines multiples, donc un polynôme "générique" dans \mathbf{C} admet n racines distinctes et une matrice "générique" est diagonalisable sur \mathbf{C} .

1.8. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire:

Le déterminant d'une matrice triangulaire et le produit de ses éléments diagonaux, donc pour le polynôme caractéristique on a

$$p_A(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (x - a_{ii}).$$

Exemples de matrices non-diagonalisables.

Soit A une matrice triangulaire avec $a_{11} = \dots = a_{nn} = a$. Si A est diagonalisable, alors A est semblable à aI_n et donc $A = aI_n$. Par conséquent, une matrice triangulaire avec les mêmes éléments sur la diagonale est diagonalisable seulement si elle est déjà diagonale.

1.9. Exemple en dimension 2.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors $p_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$.

Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}((a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc})$.

Soit $\Delta = (a-d)^2 + 4bc$ le discriminant.

1. $K = \mathbf{C}$. Si $\Delta \neq 0$, on a deux valeurs propres distinctes et A est diagonalisable. On peut écrire les vecteurs propres comme $v_k = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_k - a \end{pmatrix}$

ou $v_k = \begin{pmatrix} \lambda_k - d \\ c \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$.

2. $K = \mathbf{R}$. Si $\Delta > 0$, on a deux valeurs propres **réelles** distinctes et A est diagonalisable (sur R).

Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racines réelles et A n'est diagonalisable sur R .

On peut réduire A par similitude à la forme $A' = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ -\beta, \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha = (a+d)/2$

et $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$.

•• En effet, soit $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ les valeurs propres de A et w et \bar{w} des vecteurs propres associés: $Aw = \lambda w$ et $A\bar{w} = \bar{\lambda}\bar{w}$.

Les vecteurs w et \bar{w} forment une base de C^2 .

Soit $w = u + iv$ avec $u, v \in R^2$; les vecteurs u et v forment une base de R^2 .

Séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'égalité

$A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv)$ on obtient

$Au = \alpha u - \beta v$ et $Av = \beta u + \alpha v$. ••

Si $\Delta = 0$, on a une racine double et A est diagonalisable si et seulement si A est déjà diagonale.

1.10. Structure du polynôme caractéristique

Théorème. Soit

$$p_A(x) = \det(A - xI_n) = (-1)^n x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n$$

1. Les coefficients c_1, \dots, c_n sont des polynômes en éléments matriciels a_{ij} de A ; c_k est un polynôme homogène de degré k .
2. $c_1 = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = (-1)^{n-1} \text{trace}(A)$
3. $c_n = \det(A)$.
4. c_k est invariant par similitude: c_k est le même pour A et $P^{-1}AP$.

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs.

1.11. Lemme. Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux: si les blocs diagonaux sont A_1, \dots, A_k , alors

$$p_A(x) = p_{A_1}(x) \dots p_{A_k}(x).$$

Cette propriété utile est la conséquence directe de la propriété suivante du déterminant:

Lemme. Soit A une matrice triangulaire par blocs avec les blocs diagonaux A_1, \dots, A_k . Alors $\det A = \det A_1 \cdot \dots \cdot \det A_k$.