Séries de Fourier.

.

Fonctions périodiques. Une fonction $f : R \to R$ est dite **périodique** de période T si $f(x+T) = f(x)$ pour tout x.

On a aussi $f(x+nT) = f(x)$ pour tout entier n, donc tout multiple de T est aussi une période. En pratique on met en évidence la plus petite période.

Exemple: $\cos(\omega x)$, $\sin(\omega x)$, la période est $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Le graphe d'une fonction périodique s'obtient par des translations d'amplitude nT à partir du graphe de la restriction de f à un intervalle de longueur T.

.

Si f est T- périodique et intégrable sur $[0, T]$, elle est intégrable sur tout intervalle fini et pour tout a on a

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Une fonction f est dite **paire** (resp., **impaire**) si pour tout x on a $f(-x) = f(x)$ (resp., si $f(-x) = -f(x)$).

On dit qu'une fonction f est **continue par morceaux** sur l'intervalle $[a, b]$ si il y a une partition $a = a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n = b$ de $[a, b]$ telle que f est continue sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ et possède une limite à droite en a_i et à gauche en a_{i+1}; on note ces limites $f(a_i^+)$ et $f(a_{i+1}^-)$.

Une telle fonction est intégrable sur $[a, b]$ et la valeur de l'intégrale ne dépend pas des valeurs de f au points $a_1, ..., a_n$.

.

On définit les fonctions continues f_i associées à f:
$f_i(x) = f(x)$ si $a_i < x < a_{i+1}$, $f_i(a_i) = f(a_i^+)$ et $f_i(a_{i+1}) = f(a_{i+1}^-)$.

.

On dit que f est **dérivable par morceaux** sur $[a, b]$ si pour tout i la fonction f_i est dérivable sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Séries trigonométriques.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels (ou complexes) et soit $\omega > 0$ un réel positif. Pour tout $n \geq 0$ on note $f_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$. La série de fonctions

$$\sum_0^\infty f_n = a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

s'appelle une série trigonométrique. Le domaine de convergence de cette série est à préciser.

Si la série converge sur R, sa somme est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

.

Lemme. Si une série trigonométrique converge uniformément sur R, les coefficients a_n et b_n sont déterminés par la somme $s(x)$ de la série de la façon suivante:

$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(x)\cos(n\omega x)dx$,
$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(x)\cos(n\omega x)dx$,
$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(x)\sin(n\omega x)dx$.

.

La série de Fourier d'une fonction périodique.

Définition. Soit f une fonction T- périodique et intégrable sur $[0, T]$. On note $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Les **coefficients de Fourier** de la fonction f sont définis par
$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx$,
$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx$.

La série trigonométrique

$$S_f = a_0 + \sum_1^{\infty}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x))$$

s'appelle la **série de Fourier** de f.

.

Remarques. **1.** On peut remplacer $\int_0^T$ par $\int_a^{a+T}$et en particulier par $\int_{-T/2}^{T/2}$.
2. Si f est paire, $b_n = 0$ et $S_f = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n\cos(n\omega x)$.
3. Si f est impaire, $a_n = 0$ et $S_f = \sum_1^{\infty} b_n\sin(n\omega x)$.

.

Proposition. Si deux fonctions f et g ont la même série de Fourier, alors $f(x) = g(x)$ en tout point x de continuité de f et g.

.

Proposition. Soit f une fonction T- périodique continue, dérivable par morçeaux, avec la dérivé continue par morçeaux. Alors la série de Fourier de la dérivée f' s'obtient en dérivant terme à terme la série de Fourier de f:

$$S_{f'} = \sum_1^{\infty}(nb_n\cos(n\omega x) - na_n\sin(n\omega x))$$

Proposition. On peut intégrer la série de Fourier de f terme à terme et la série intégrée converge vers la primitive de f uniformément sur tout intervalle fini.

.

Convergence des séries de Fourier

.

Lemme. Soit f une fonction T- périodique continue par morçeaux. Si la série de Fourier de f converge en $x = x_0$, alors sa somme est égale à $f(x_0)$ si f est continue en x_0 et est égale à $\frac{1}{2}[(fx_0^+) + f(x_0^-)]$ si f fait un saut en x_0.

.

Proposition. La série de Fourier d'une fonction périodique continue, dérivable par morçeaux, avec la dérivé continue par morçeaux, converge normalement.

.

Théorème de Dirichlet. Soit f une fonction périodique et dérivable par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur R et sa somme est égale à $f(x)$ si f est continue en x et est égale à $\frac{1}{2}[(fx^+) + f(x^-)]$ si f fait un saut en x.

.

Théorème. Soit f une fonction périodique continue, soit $s_n(x)$ la n-ème somme partielle de sa série de Fourier. Soit

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}[s_0(x) + s_1(x) + ... + s_n(x)]$$

Alors la suite $\sigma_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ quand $n \to \infty$.

.

Théorème. Soit f une fonction T- périodique et bornée sur $[0, T]$. La série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique:

$$\int_0^T \mid S_n(x) - f(x) \mid^2 dx \to 0$$

quand $n \to \infty$.

Formule de Parseval. Soit f une fonction réelle, T-périodique et bornée. On note a_n et b_n ses coefficients de Fourier. Alors les séries numériques $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ sont convergentes et

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)^2 dx$$

En particulier, les coefficients de Fourier $a_n \to 0$ et $b_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

.