Chapitre I. Suites et séries numériques.
Suites et séries de fonctions.

.

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$; pour tout $n \geq 0$ soit f_n une fonction sur I.

.

Définition 1. On dit que la suite de fonctions (f_n) converge **simplement** sur I vers la fonction f si pour tout $x \in I$ on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

On dit que la fonction f est la limite de la suite (f_n); on note $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ou $f_n \to f$.

.

Exemple. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$

.

Définition 2. On dit que la suite de fonctions (f_n) converge **uniformément** sur I vers la fonction f si $\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in I} \mid f_n(x) - f(x) \mid) = 0$.

.

Définitions équivalentes:

1) (f_n) converge **uniformément** sur I vers f si il existe une suite numérique c_n telle que pour tout $x \in I \mid f_n(x) - f(x) \mid \leq c_n$ et $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$;

2) (f_n) converge **uniformément** sur I vers f si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que quand $n > N$ on a $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon$ pour tout $x \in I$.

.

Proposition 1. Continuité. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément sur I vers f. Alors f est continue.

Exemple: convergence non-uniforme, limite discontinue

$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+|nx|} = -1$ si $x < 0$, $= 0$ si $x = 0$ et $= 1$ si $x > 0$.

.

Proposition 2. Intégration. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément sur I vers f. Alors

La suite des primitives $\int_{x_0}^x f_n(t)dt$ converge vers la primitive $\int_{x_0}^x f(t)dt$ uniformément sur tout intervalle fini $[a,b]$ contenu dans I.

En particulier,

$$\int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(t))dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt$$

Remarque. Pour pouvoir passez à la limite dans l'intégrale, $\int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(t))dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt$. il suffit de supposer que la suite f_n converge simplement sur $[a,b]$ et que les fonctions f_n sont uniformément bornées: $f_n(x) \leq M$, $n \geq 0$, $x \in [a,b]$.

.

Exemple: convergence "non-bornée".

Soit $f_n(x) = n^a x e^{-nx}$; ($a > 0$ est un parametre). Alors $f_n(x) \to 0$ si $x \geq 0$. On a $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$ si $a < 2$,

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$ si $a = 2$, et

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \infty$ si $a > 2$.

.

Proposition 3. Dérivation. Soit (f_n) une suite de fonctions continument dérivables converge simplement sur I. On suppose que pour une valeur $x_0 \in I$ la suite $f_n(x_0)$ converge et que la suite des dérivées f_n' converge **uniformément** sur I. Alors la suite converge simplement sur I, sa limite $\lim_{n\to\infty} f_n$ est dérivable et

$$\frac{d}{dx}(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty}(\frac{d}{dx} f_n)$$

.

Séries de fonctions.

.

Définition 1. A partir d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ on définit une autre suite de fonctions $(s_n)_{n\geq 0}$ par $s_n = f_0 + ... + f_n$. L'étude de la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ est appelée l'étude de la série de fonctions $\sum_0^\infty f_n$;

f_n est le terme de rang n; s_n est la somme partielle de rang n de la série.

.

Définition 2. Si la suite des sommes partielles (s_n) converge simplement sur I vers la fonction s, on dit que la série $\sum f_n$ converge **simplement** sur I et a pour somme s; on note $s(x) = \sum_0^\infty f_n(x)$.

.

Définition 3. Si la convergence de la suite (s_n) est uniforme sur I, on dit que la série $\sum f_n$ converge **uniformément** sur I.

.

Définition 4. La série $\sum f_n$ converge **absolument** sur I si la série $\sum \mid f_n \mid$ converge simplement sur I.

.

Définition 5. Convergence normale. On dit que la série $\sum f_n$ converge **normalement** sur I si la série numérique $\sum \sup_{x\in I} \mid f_n(x) \mid$ converge.

Définition équivalente: La série $\sum f_n$ converge **normalement** sur I si il existe une série numérique $\sum u_n$ convergente telle que $\mid f_n(x) \mid \leq u_n$ pour tout n et tout $x \in I$.

.

La convergence normale entraine la convergence uniforme et la convergence absolue.

.

Proposition 1. Continuité. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur I qui converge uniformément sur I. Alors la somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue.

.

Proposition 2. Intégration. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur I qui converge uniformément sur I. Alors on peut intégrer la série terme à terme: la série des primitives $\sum \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ converge vers la primitive $\int_{x_0}^{x}(\sum f_n(t)dt)$ uniforméḿent sur tout intervalle fini $[a, b]$ contenu dans I.

En particulier,

$$\int_a^b [\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt] = \sum [\int_a^b f_n(t)dt]$$

.

Remarque. Pour pouvoir intégrer une série terme à terme,
$\int_a^b(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt) = \sum \int_a^b f_n(t)dt \int_a^b f_n(t)dt.$
il suffit de supposer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b]$ et que les sommes partielles $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ sont uniformément bornées: $s_n(x) \leq M$, $n \geq 0$, $x \in [a, b]$.

.

Proposition 3. Dérivation. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continument dérivables sur I. On suppose que pour une valeur $x_0 \in I$ la série $\sum f_n(x_0)$ converge et que la série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur I. Alors la série $\sum f_n$ converge simplement sur I, sa somme $\sum f_n$ est dérivable sur I et on peut dériver la série $\sum f_n$ terme à terme: $(\sum f_n)' = \sum f_n'$.

.

Remarque. La convergence normale est plus forte que la convergence uniforme et souvent elle est plus facile à vérifier.