Algèbre linéaire.

.

Espaces Vectoriels.

Définition. Un espace vectoriel sur le corps **K** (pour nous **K** = **R** ou **C** = **K**) est un ensemble E muni de deux opérations notées: $E \times E \to E$, $(u, v) \to u + v$ et $K \times E \to E$, $(\lambda, v) \to \lambda v$ vérifiant:

- Pour tous u, v, w dans E on a $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativité)
- Il existe un vecteur neutre noté 0 tel que pour tout $u \in E$ on a $u + 0 = u$;
- Tout $u \in E$ possède un opposé noté $-u$ tel que $u + (-u) = 0$;
- Pour tous u, v de E on a $u + v = v + u$ (commutativité);
- Pour tout $u \in E$ et tous $\lambda, \mu \in K$ on a $(\lambda+\mu)u = \lambda u+\mu u$ et $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$;
- Pour tous u, v de E et tout $\lambda \in K$ on a $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

Les éléments eE sont **vecteurs** et les éléments de K **scalaires**.

.

Exemples. 1) $\mathbf{K}^n$, l'ensemble des n-suites numériques.

2) $\mathbf{K}[x]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans **K**.

.

Une **combinaison linéaire** de vecteurs $v_1, ..., v_n$ est une somme
$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, avec $\alpha_i \in \mathbf{K}$.

Définition. Un **sous-espace vectoriel** d'un espace vectoriel E est une partie non-vide F de E stable pour les deux opérations de E, c'est-à-dire:

- Pour tous u, v de F $u + v \in F$;
- Pour tout $u \in F$ et tous $\lambda \in \mathbf{K}$ on a $\lambda u \in F$.

.

Remarque. F est un sous-espace si et seulement si F est non-vide et si F contient toutes les combinaisons linéaires de ses vecteurs.

.

Opérations sur les sous-espaces.

1) Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E, l'intersection $E_1 \cap E_2$ est in sous-espace; en général, l'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces est in sous-espace.

2) $G = E_1 + E_2 = \{u + v/u \in E_1, v \in E_2\}$ est un sous-espace appelé la **somme** de E_1 et E_2.

Si de plus $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, on dit que la somme est directe (on note
$G = E_1 \oplus E_2$). Tout élément de G s'écrit alors de façon unique $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$.

.

Définition: sous-espace engendré par une partie de E.

Soit $A \subset E$; le sous-espace engendré par A, noté $Vect(A)$, est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de A.

.

Définition. Une famille $(v_1, ..., v_n)$ de vecteurs de E est **libre** (on dit aussi que les vecteurs $v_1, ..., v_n$ sont **linéairement indépendants**) si il n'y pas de relation linéaire non-triviale entre ses vecteurs: $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$ entraine $\alpha_1 = 0$,..., $\alpha_n = 0$.

.

[Plus généralement, on dit que la famille est **libre** si toute partie finie de cette famille est libre.]

Dans le cas contraire on dit que la famille est **liée**.

Remarque: la famille $(v_1, ..., v_n)$ est **libre** si et seulement si

$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$ entraine $\alpha_1 = \beta_1$,... $\alpha_n = \beta_n$.

.

Définition.

On dit que la famille $(v_1, ..., v_n)$ (ou une partie A de E) est **génératrice** si tout élément de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, ..., v_n$: $E = Vect(v_1, ..., v_n)$ (respectivement, des vecteurs de A: $E = Vect(A)$).

.

Définition. On dit que la famille B est une **base** de E si elle est à la fois libre et génératrice. Si B est une base de E, tout élément de E s'écrit alors de façon unique comme combinaison linéaire d'un nombre fini des vecteurs de B.

.

Proposition. 1) Tout espace vectoriel possède une base; plus précisément, toute partie libre de E peut être complétée en une base de E.

2) Si E possède une base ayant un nombre fini d'éléments, noté n, toutes les bases de E possèdent n éléments; n est appelé la **dimension** de E.

Si E possède une base ayant un nombre infini d'éléments, toutes les bases de E sont infinies; on dit que E est de dimension infinie.

.

Une base de E donne un système de coordonnées linéaire dans E: au vecteur $v \in E$ on associe les coefficients de la décomposition de v par rapport à la base.

.

Lemme. Soit E un espace de dimension finie. Pour tout sous-espace F on a $dim(F) \leq dim(E)$ et si $dim(F) = dim(E)$ alors $F = E$.

.

Applications linéaires

.

Définitions. Soient E et E' des K-espaces et soit $f : E \to E'$ une application.

On dit que f est une **application linéaire** si pour tous u, v de E et tout $\lambda \in K$ on a

$f(u + v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Si en plus f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme** de E sur E'.

Si $E' = K$, f est appelée **forme linéaire**.

Si $E' = E$, f est appelée un **endomorphisme** de E.

Définition. Le **noyau** de f est $\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E : f(u) = 0\}$, c'est un sous-espace de E.

L'image de f est $\mathrm{Im}(f) = \{f(u) : u \in E\}$, c'est un sous-espace de F.

$\dim(\mathrm{Im} f)$ est appelée le **rang** de f.

.

Proposition (formule du rang). Si E est de dimension finie, on a

$\dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim E$.

.

Proposition. Soit $dim(E) = n$. Une base de E donne un isomorphisme de E avec l'espace canonique K^n. (Donc tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes entre eux.)

.

Matrice d'une application linéaire

.

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Pour $v \in E$ on décompose $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$ et on associe à v la colonne de ces coefficients,

$v_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ..... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

.

Soit $f : E \to E'$ linéaire avec E et E' des **K**-espaces de dimension finie. On note n =dim$E$, p =dim$F$ et soient $B = (e_1, ..., e_n)$ et $B' = (e'_1, .., e'_p)$ des bases de E et E'.

La **matrice de** f dans les bases B et B', noté $f_{B',B}$, est la matrice dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs $f(e_1), ..., f(e_n)$ dans la base B':

$f_{B',B} = (f(e_1)_{B'}, ..., f(e_n)_{B'})$.

Plus en détail: pour tout j, $j = 1, ..., n$, on écrit $f(e_j) = a_{1j} e'_1 + ... + a_{pj} e'_p$. Alors

$A = \begin{pmatrix} a_{11} ....a_{1n} \\ .... \\ a_{p1} ....a_{pn} \end{pmatrix}$.

C'est une matrice à p lignes et et n colonnes.

.

L'action de f sur les vecteurs $v \in E$ est exprimée "en coordonnées" par:

$$(f(v)_{B'} = f_{B',B} v_B$$

On défini le **rang** de A comme étant la dimension de sous-espace de $\mathbf{K}^p$ engendré par les vecteurs-colonnes de la matrice A. On a alors rang(A) = rang(f).

.

Composition. Soit $f : E \to E'$ et $g : E' \to E''$. Soit B, B' et B'' des bases dans E, E' et E'' respectivement.

Alors

$$(g \circ f)_{B'',B} = g_{B'',B'} f_{B',B}$$

Donc la composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices.

.

Changement de base.

Soit $E' = E$ et Soit $B' = (e'_1, .., e'_n)$ une autre base de E.

Soit $Id_{B',B}$ la matrice de l'application identité dans deux bases.

Alors

$$v_{B'} = Id_{B',B} v_B$$

Donc, $Id_{B',B}$ est la matrice de changement de base.

Noter que $Id_{B,B'} Id_{B',B} = Id_{B,B} = 1_n$ - matrice identité.

Donc $Id_{B,B'} = Id^{-1}_{B',B}$, changement de base inverse.

Plus de détail: pour tout j, $j = 1, ..., n$, on écrit $e'_j = \alpha_{1j} e_1 + ... + \alpha_{nj} e_n$. Alors la matrice $P = Id_{B,B'}$ est composée de colonnes sont formées des composantes des vecteurs $e'_1, .., e'_n$ dans la base $B = (e_1, ..., e_n)$:

.

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} ....\alpha_{1n} \\ .... \\ \alpha_{n1} ....\alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

.

Matrice d'un endomorphisme

.

Lorsque $f : E \to E$ est un endomorphisme, donc $E' = E$, on choisit $B' = B$ et on note $f_B = f_{B,B}$; on l'appelle la **matrice de f dans la base** B.

En particulier, si g est un autre endomorphisme de E, alors $(f \circ g)_B = f_B g_B$.

.

Changement de base.

Soit $B' = (e'_1, .., e'_n)$ une autre base de E.

On a $f_B Id_{B,B'} = f_{B,B'} = Id_{B,B'} f_{B'}$. Donc en posant $P = Id_{B,B'}$ (matrice de passage) on a

$$f_{B'} = P^{-1} f_B P$$

Les matrices f_B et $f_{B'}$ sont dites **semblables**.