Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Math IV-analyse
Année 2015/2016

Série n°3 :
Série de fonctions

Exercice I : Convergence simple et normale
Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$.
2. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a>0$.
3. $f_n(x) = \dfrac{x}{n^3+x^{3/2}}$ sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a>0$.

Exercice II : Convergence uniforme
Reprendre les fonctions et les ensembles de l'exercice 1 et étudier la convergence uniforme.

Exercice III : Convergence simple, uniforme et normale
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$.

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle elle converge normalement.

Exercice IV : Règle d'Abel uniforme

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n+x}$ pour $x \in [-\pi, -\pi/2]$.

1. En utilisant la règle d'Abel uniforme, montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[-\pi, -\pi/2]$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[-\pi, -\pi/2]$.

Exercice V : Série de fonction et intégrale, et dérivée

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que sa somme $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.
3. Montrer que $\int_0^\pi f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(2n-1)^4}$.
4. Montrer que $f'(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice VI : Classe $\mathscr{C}^\infty$

On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.