Série n°7

Intégrales dépendant d'un paramètre

Correction des exercices I, II et III

Exercice 1 :

1. a) pour tout réel t et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction f est le rapport de deux polynômes bien définis et dont le polynôme quotient ne s'annule pas. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ donc l'est aussi sur $\mathbb{R}_+^* \times [0,1]$ car $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

b) soit $x \neq 1$, alors :

$$\frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{t^2+x^2} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{t^2+x^2-t^2-1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2-1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)} = f(x,t)$$

$$I(x) = \int_0^1 f(x,t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{t^2+x^2}\,dt \quad , x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{t^2+x^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{x^2-1}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt - \frac{1}{x^2-1}\int_0^1 \frac{1}{t^2+x^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{x^2-1}\Big[\operatorname{arctg}(t)\Big]_0^1 - \frac{1}{x^2-1}\Big[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x}\right)\Big]_0^1 \times \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow I(x) = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

or $I(1) = \int_0^1 f(1,t)\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \lim_{x\to 1}\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$

$$= \lim_{x\to 1} I(x)$$

$$= J$$

c) Pour le calcul de J : on pose le changement de variable suivant $x = 1+h$. Effectuons le développement de $\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ autour de 1 c'est-à-dire celui de $\frac{1}{1+h}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+h}\right)$ autour de 0.

$$\frac{1}{1+h}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+h}\right) = \operatorname{arctg}(1) - h\left(\operatorname{arctg}(1)+\frac{1}{2}\right) + o(h)$$

avec $o(h) \to 0$ quand $h \to 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+h}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+h}\right) = \frac{\pi}{4} - h\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) + o(h)$$

Ainsi en revenant dans l'expression de $I(1)$ on a :

$$I(1) = J = \lim_{x\to 1} I(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(1+h)^2-1}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + h\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right) + o(h)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h(h+2)}\left(h\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right) + o(h)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h+2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2} + o(h)\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

2. Pour un calcul direct avec $t = \tan(\theta)$

on a $dt = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$ $\quad$ $t=0 \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}(0) = 0$

$= (1+\tan^2\theta)\,d\theta.$ $\quad$ $t = 1 \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

D'où $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\theta)^2 \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$= \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \, d\theta$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{2} + \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{2}$

$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

Exercice II

1) On réécrit $F(x)$ sous la forme $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, x)\, d\theta$
avec la fonction $f : [-\pi,\pi] \times]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(\theta, x) \longrightarrow f(\theta, x) = \ln(1+x^2-2x\cos\theta)$

$\forall (\theta, x) \in [-\pi,\pi] \times]-1,1[$, on a $1+x^2-2x\cos(\theta) > 0$ ce qui montre que la fonction f à deux variables est bien définie et continue. Par suite son intégrale suivant l'une des variable est bien continue (donc F est continue).

De plus $\frac{\partial f}{\partial x}(\theta, x) = \frac{2(x-\cos\theta)}{1+x^2-2x\cos\theta}$ et l'application qui à $(\theta, x) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, x)$ est bien définie et continue sur $[-\pi,\pi] \times]-1,1[$ car étant le rapport de deux fonctions dont le quotient est non nul (effectivement les deux fonctions sont continues).

Ainsi F est dérivable sur $]-1,1[$.

2) $F'(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial x} f(\theta, x)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(x-\cos\theta)}{1+x^2-2x\cos\theta} d\theta$

soit $t = \tan\frac{\theta}{2}$ c'est-à-dire $\theta = 2\arctg(t)$ et $d\theta = \frac{2}{1+t^2}dt$

ici on utilisera le fait que $\cos\theta = \frac{1-\tan^2\theta/2}{1+\tan^2\theta/2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Ainsi on a : $F'(x)=4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+x^2-2x\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\times\frac{1}{1+t^2}\,dt$

Car si $\theta=-\pi$ alors $t=-\infty$ et si $\theta=\pi$ alors $t=+\infty$

$$\Rightarrow F'(x)=4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2(x+1)+(x-1)}{t^2(x+1)^2+(x-1)^2}\times\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$=4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x+1}\,\frac{t^2(x+1)+(x-1)(x+1)}{t^2(x+1)^2+(x-1)^2}\times\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$=4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x+1}\cdot\left(\frac{1}{1+t^2}+\frac{(x-1)(x+1)-(x-1)^2}{\left(t^2(x+1)^2+(x-1)^2\right)(1+x^2)}\right)dt$$

$$=4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{1+t^2}+\frac{(x+1)^2(x-1)}{2x}\cdot\frac{1}{t^2(x+1)^2+(x-1)^2}-\frac{(x-1)}{2x}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=\frac{4\pi}{x+1}\left(1+\frac{(x+1)^2(x-1)}{2x}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}\cdot\frac{(1+x)}{1-x}-\frac{(x-1)}{2x}\right)\quad\forall x\neq 0$$

$$=\frac{4\pi}{x+1}\left(1-\frac{(x+1)}{2x}-\frac{(x-1)}{2x}\right)\quad\forall x\neq 0$$

$F'(x)=0\quad\forall x\neq 0$

Par continuité de F' on a bien $F'(x)=0\ \forall x\in]-1,1[$.

3) $F'(x)=0$ sur $]-1,1[\Rightarrow F(x)=cte=F(0)=0$.

Exercice 3

1) On réécrit $F(x)$ sous la forme

$F(x)=\int_0^{\pi}f(t,x)\,dt$ avec $f(t,x)=\sqrt{|1-x\cos(t)|}$

$\forall t \in [0,\pi]$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(t,x)$ peut être vue comme la composition de deux fonctions continues ($\sqrt{x}$ et $|1-x\cos(t)|$) donc f est continue sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}$. Ainsi f est intégrable sur $[0,\pi]$ et que son intégrale, F, est continue sur $\mathbb{R}$.

2) $F(-x) = \int_0^\pi \sqrt{|1+x\cos t|}\,dt = ?$ faisons le changement de variable $u = \pi - t \Rightarrow du = -dt$ et si $t=0 \Rightarrow u=\pi$ et si $t=\pi \Rightarrow u=0$

$$\Rightarrow F(-x) = -\int_\pi^0 \sqrt{|1+x\cos(\pi-u)|}\,du = -\int_\pi^0 \sqrt{|1-x\cos u|}\,du$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{|1-x\cos u|}\,du$$

$$= F(x)$$

d'où $F(-x) = F(x)$ donc F est paire.

3) $f(t,x)$ est deux fois continûment dérivable sur $[0,\pi]\times]-1,1[$

et on a : $\dfrac{\partial}{\partial x} f(t,x) = \dfrac{-\cos t}{2\sqrt{1-x\cos t}}$ car ici $|1-x\cos(t)| = 1-x\cos t$ (car $0 \leq \cos t \leq 1$ et $x \in]-1,1[$)

et $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x) = \dfrac{-\cos^2 t}{4(1-x\cos t)^{3/2}}$

Les ~~dérivabl~~ dérivées partielles étant bien définies et continues sur $[0,\pi]\times]-1,1[$ alors F est deux fois dérivable $\forall x \in]-1,1[$.

$$F'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt = \int_0^\pi \frac{-\cos t}{\sqrt{1-x\cos t}}\,dt \quad \text{et} \quad F''(x) = \int_0^\pi \frac{-\cos^2 t}{4(1-x\cos t)^{3/2}}\,dt$$

Commençons par regarder sur $[0,\pi]\times]-1,1[$, la relation suivante :

$$4x(x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,x)+4(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)-xf(t,x)$$

$$=x(x^2-1)\frac{(-\cos^2 t)}{(1-x\cos t)^{3/2}}+\frac{2(x^2-1)(-\cos t)}{\sqrt{1-x\cos t}}-\frac{x(1-x\cos t)^2}{(1-x\cos t)^{3/2}}$$

$$=\frac{1}{(1-x\cos t)^{3/2}}\left[x(x^2-1)(-\cos^2 t)+2(x^2-1)(-\cos t)(1-x\cos t)-x(1-x\cos t)^2\right]$$

$$=\frac{1}{(1-x\cos t)^{3/2}}\left[-x(x^2-1)\cos^2 t-2(x^2-1)\cos t+2x(x^2-1)\cos^2 t-x(1-2x\cos t+x^2\cos^2 t)\right]$$

$$=\frac{1}{(1-x\cos t)^{3/2}}\left[x(x^2-1)\cos^2 t-2(x^2-1)\cos t-x+2x^2\cos t-x^3\cos^2 t\right]$$

$$=\frac{1}{(1-x\cos t)^{3/2}}\left[-x\cos^2 t+2\cos t-x\right]$$

$$=\frac{1}{(1-x\cos t)^{3/2}}\left(-x(1+\cos^2 t)+2\cos t\right) \quad (*)$$

or $R(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\sin t}{\sqrt{1-x\cos t}}\right)=\frac{2\cos t(1-x\cos t)-\sin^2 t}{(1-x\cos t)^{3/2}}$

$$=\frac{-x(\cos^2 t+1)+2\cos t}{(1-x\cos t)^{3/2}}$$

D'après $(*)$ on a :

$$4x(x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,x)+4(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)-xf(t,x)=R(t,x)$$

En intégrant en "t" cette dernière relation on a:

$$4x(x^2-1)F''(x)+4(x^2-1)F'(x)-xF(x)=\int_0^{\pi}R(t,x)\,dt$$

4) Calculons $\int_0^{\pi}R(t,x)\,dt$?

$$\int_0^{\pi}R(t,x)\,dt=\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\sin t}{\sqrt{1-x\cos t}}\right)dt=\left[\frac{2\sin t}{\sqrt{1-x\cos t}}\right]_0^{\pi}=0$$

d'où F vérifie bien l'équation différentielle demandée, au regard du résultat démontré à la question 3).