Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse IV Printemps 2014

Contrôle Final Ecrit - Analyse IV
4 juin 2014

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones portables est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (20 minutes) (5 points)

1. Dans ce qui suit on considère $z \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$.
   (a) (1,5 point) Donner le développement en série entière de la fonction $z \to \dfrac{1}{1-z}$ et calculer son rayon de convergence.
   (b) (1,5 point) En déduire le développement en série entière, ainsi que leur rayon de convergence (en justifiant correctement les réponses) des fonctions suivantes :
   $z \to \dfrac{1}{1+z}$, puis $x \to \ln(1+x)$, et $x \to \arctan(x)$.
2. (2 points) Enoncer, sans les démontrer l'inégalité de Bessel et l'égalité de Parseval.
3. (BONUS : 1 point) Montrer l'inégalité de Bessel.

Exercice 1 (30 minutes) (6 points)

On considère la série de fonctions $\sum f_n$, où les fonctions f_n sont définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n = \frac{2nx}{1 + n^3x^3}.$$

1. (a) (1 point) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
   (b) (2 points) Etudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la suite f_n puis de la série $\sum f_n$.
   (c) (1 point) Etudier la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur $[1, +\infty[$.
2. (2 points) Développer en série entière et déterminer le rayon de convergence des deux fonctions suivantes :

$$1.\ \ x \mapsto \sqrt{16 + x^2} \quad \text{et} \quad 2.\ \ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}}.$$

Exercice 2 (30 minutes) (6 points)

On considère la fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \cosh(ax) \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*.$$

On rappelle que la fonction $\cosh$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. (1 point) Montrer (en argumentant avec soin) que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
2. (4 points) Déterminer sa série de Fourier, en formulation complexe, puis en formulation réelle.
3. (1 point) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$.

Exercice 3 (40 minutes) (6 points)

On considère l'intégrale suivante :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + xt^2)}{1 + t^2} dt \quad \text{, où } x \geq 0.$$

1. (0.5 point) Calculer $I(0)$.
2. (1 point) On suppose $x > 0$.
   (a) Calculer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(1 + xt^2)}{1 + t^2}$.
   (b) En déduire une majoration de $\dfrac{\ln(1 + xt^2)}{1 + t^2}$ pour un temps "suffisamment" grand.
3. (0.5 point) En déduire que $I(x)$ converge pour tout $x \geq 0$.
4. (1 point) Soit $\alpha > 0$. Montrer que $I(x)$ est normalement convergente sur $[0, \alpha]$. En déduire que $I(x)$ est normalement convergente.
5. (1 point) Montrer que I est continue sur $[0, +\infty[$.
6. (1 point) Soit $\beta > 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\ln(1 + xt^2)}{1 + t^2}$ est normalement convergente sur $[\beta, +\infty[$. En déduire que I est dérivable sur $]0, +\infty[$.
7. (1 point) Montrer que I' est continue sur $]0, +\infty[$.
8. (BONUS : 2 points) Calculer $I'(x)$ pour $x > 0$ puis en déduire la valeur de $I(x)$ pour $x \geq 0$.