I Continuité sous le signe intégrale

Théorème 1.
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$. On suppose :

- $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
- Il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$, continue par morceaux et intégrable sur J telle que :

$$\forall x \in I, \forall t \in J, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

  (*hypothèse de domination*)

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Remarques 1.

1. La fonction de domination φ doit être indépendante de x.
2. La majoration $\forall t \in J, \ \ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ prouve que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J. Il n'est donc pas nécessaire de vérifier cette hypothèse.
3. Il est parfois difficile de trouver une fonction φ qui réalise une domination valable pour tout x de I, lorsqu'une des bornes est ouverte. Il peut être alors judicieux de remplacer I par un segment $[a,b]$ quelconque inclus dans I, et ainsi d'établir la continuité de g sur *tout* segment inclus dans I, ce qui montre bien la continuité sur I.

II Dérivation sous le signe intégrale

Théorème 2.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$. On suppose :

- $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I, et la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I.
- $\forall x \in I$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux, et intégrables sur J.
- Il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$, continue par morceaux et intégrable sur J telle que :

$$\forall x \in I, \forall t \in J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad (\textit{hypothèse de domination})$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et on a :

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques 2.

1. La fonction de domination φ doit être indépendante de x.
2. La majoration $\forall t \in J$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ prouve que la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur J. On n'est donc pas obligé de le prendre comme hypothèse.
3. Comme pour la continuité, il peut être judicieux de remplacer I par un segment $[a,b]$ quelconque inclus dans I, et de calculer $g'(x)$ sur ce segment. Le résultat obtenu sera bien sûr valable sur I tout entier.