2017
UCBL

TD2 algèbre : systèmes linéaires, trace, géométrie

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 2. Trouver les solutions de

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{array}\right.$$

Exercice 3. Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1. \end{array}\right.$$

Exercice 4. Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl} (1+\lambda)x + y + z + t & = & a \\ x + (1+\lambda)y + z + t & = & b \\ x + y + (1+\lambda)z + t & = & c \\ x + y + z + (1+\lambda)t & = & d \end{array}\right.$$

Exercice 5 (Formule d'intégration numérique)**.** Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré $\leqslant 3$ on ait :

$$\int_2^4 P(x)\, dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$

Exercice 6. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 7. Que peut-on dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $\mathrm{tr}(A\,{}^t\!A) = 0$?

Exercice 8. Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \bar\alpha & \bar\alpha^2 \\ \alpha & 1 & \bar\alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbb{C}) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\
0 & 1 & \ddots & & \vdots \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\
0 & & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n \\
0 & 1 & 2 & \cdots & \vdots \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & 0 & 1 & 2 \\
0 & \cdots & & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

Exercice 9 (M antisymétrique $\Rightarrow I + M$ est inversible)**.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $I+M$ est inversible (si $(I+M)X = 0$, calculer ${}^t(MX)(MX)$).
2. Soit $A = (I - M)(I + M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Exercice 10. $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \,.$$

Montrer que A est inversible.

Ex 11 : Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan (orienté).
A tout point M de coordonnées x, y dans ce repère, on associe le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

On considère les transformations suivantes :

1. la translation de vecteur directeur $\vec{u} = (a, b)$, notée T_1
2. la rotation de centre O et d'angle θ, notée T_2
3. la symétrie d'axe (Ox), notée T_3
4. la symétrie de centre O, notée T_4
5. l'homothétie de centre O et de rapport k, notée T_5

- Pour $i \in [\![1, 5]\!]$, on note $M_i = T_i(M)$ l'image du point M par la transformation T_i. On note $X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur colonne associé. Pour chaque i, trouver la matrice A_i telle que $X_i = A_i X$. Voici des possibilités :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- donner la matrice d'une symétrie d'axe (Oy), d'une rotation de centre $(1, 2)$ et d'angle $\pi/3$.
- sans calculer, que vaut $\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi & 0 \\ \sin\pi & \cos\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?