Exercices : Notion de bijection. De nouvelles fonctions usuelles

1 Bijection et fonctions réciproques

Exercice 1 On note f la fonction sinus.

1. Déterminer les antécédents de $\frac{1}{2}$.
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$.
3. Déterminer $f^{-1}(\{5\})$ puis $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.

Exercice 2 Déterminer pour chaque fonction des ensembles de départ et d'arrivée afin que la fonction soit une bijection :

$$f : x \mapsto x^4; \quad g : x \mapsto x^3; \quad h : x \mapsto 3x-2; \quad \ln; \quad \cos .$$

Exercice 3 Les applications suivantes sont-elles bijectives ? Si, oui déterminer leur application réciproque.

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
2. $\frac{1}{\exp} : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$.
3. $\cos : [0, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$
4. $\cos : [0, \frac{5\pi}{2}] \to [-1,1]$
5. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
6. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$

Exercice 4 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$.

1. Démontrer que f est une bijection.
2. Justifier que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et calculer son nombre dérivé en $\frac{1}{2}$.

Exercice 5 On pose $f : x \mapsto x^2+4x+1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-2,+\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer la réciproque associée.
2. Déterminer $f([-3,0])$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{-4\})$ et $f^{-1}([0,1[)$.
3. On note ϕ la fonction réciproque de f restreinte à $[-2,+\infty[$. ϕ est-elle dérivable en -3 ?

Exercice 6 Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle à préciser. Donner la fonction réciproque.

Exercice 7 Démontrer que deux droites symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ ont des pentes inverses l'une de l'autre.

Exercice 8 (Opérations sur les bijections)

1. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Démontrer que $g \circ f$ est encore bijective et que
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$
2. La somme de deux bijections est-elle une bijection ?

Exercice 9 (Fonction impaire et bijective) Soit $f : I \to J$ une fonction impaire et bijective (I est donc symétrique par rapport à 0). Démontrer que J est symétrique par rapport à 0 puis montrer que f^{-1} est impaire. Le résultat est-il vrai en remplaçant impaire par paire ?

2 Apprentissage des fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 10 (Une étude de fonction) On désire étudier la fonction f définie par $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x+\pi)$. En déduire une construction du point M' de la courbe de f d'abscisse $x+\pi$, à partir du point M de la courbe de f d'abscisse x.
2. Soit $x \in [0, \pi]$. Étudier le signe de $\sin x - \cos x$ (on pourra écrire $\sin x + \cos x$ sous la forme $A \sin(t + \phi)$ ou raisonner géométriquement).
3. Terminer l'étude de f.

Exercice 11 Calculer $\arcsin(\sin a)$, $\arccos(\cos a)$, $\arctan(\tan a)$, $\arccos(\sin a)$ pour $a \in \{\frac{61\pi}{5}, \frac{76\pi}{5}, \frac{83\pi}{5}\}$.

Exercice 12 Représenter graphiquement sans calculatrice $x \mapsto \arcsin(\sin x)$.

Exercice 13 Que vaut $\arccos(\cos x)$ lorsque $x \in [6\pi, 7\pi]$ puis $x \in [25\pi, 26\pi]$?

Exercice 14 (Avec Maple ou la calculatrice) Maple ou votre calculatrice affirme que l'argument de $z = -3 + 4i$ est $-\arctan \frac{4}{3} + \pi$ ou $\arctan \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}$. Pourquoi ?

Exercice 15 L'application $\cos : [2\pi, 3\pi] \to [-1, 1]$ est-elle bijective ? Si oui, donner une expression de la fonction réciproque.

Exercice 16 Donner un équivalent de arctan, arcsin et arccos en 0.

Exercice 17 Simplifier les expressions $\tan(\arcsin x)$,$\cos(\arctan x)$ après avoir donné leur ensemble de définition.

Exercice 18 (une étude modèle) On pose $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^-$.
2. Déterminer le ou les point(s) de la courbe d'ordonnée nulle et préciser la tangente en ce ou ces point(s).
3. Étudier la fonction.

Exercice 19 Simplifier les expressions $\arccos x + \arcsin x$ et $\arccos x + \arccos(-x)$ après avoir donné leur ensemble de définition (on pourra dériver).

Exercice 20 Soit x et y des réels tels que $xy \neq 1$. Simplifier $\arctan \dfrac{x+y}{1-xy} - \arctan x - \arctan y$ (on pourra dériver).

Exercice 21 Soit f la fonction définie sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ sur un ensemble à préciser. Déterminer alors l'expression de f^{-1} à l'aide de arcsin.

Exercice 22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

1. $\arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4}$ (on pourra appliquer cos).
2. $\arcsin \frac{1}{1+x^2} + \arccos \frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$ (on pourra appliquer sin).
3. $\arccos x = \arccos \frac{1}{4} + \arccos \frac{1}{3}$
4. $\arccos(x) = 2 \arccos(-1)$.
5. $\arccos x = \arcsin 2x$.
6. $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$.
7. $2 \arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

Exercice 23 Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \arctan 2x + \arctan x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser. En déduire que cette équation admet une unique solution α.
2. Déterminer α en utilisant la formule d'addition de la tangente.

3 Apprentissage des fonctions hyperboliques

Exercice 24 (Deux inégalités)

1. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0,\ \text{sh}\ t \geqslant t$.
2. Soit $x \geqslant 0$. Démontrer en calculant $\int_0^x \text{sh}\ (t)\,\mathrm{d}t$, que
$$\text{ch}\ x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}.$$
3. L'inégalité précédente reste-t-elle vraie pour x négatif ?

Exercice 25 Calculer $C = \sum_{k=0}^{n} \text{ch}\ (a+kb)$ et $S = \sum_{k=0}^{n} \text{sh}\ (a+kb)$ avec a, b réels et $b \neq 0$.

Exercice 26 (Un peu de trigonométrie hyperbolique) Soit x et y des réels. Démontrer que
$$\text{sh}\ (x+y) = \text{sh}\ x \text{ch}\ y + \text{sh}\ y \text{ch}\ x \quad \text{et} \quad \text{ch}\ (x+y) = \text{ch}\ x \text{ch}\ y + \text{sh}\ x \text{sh}\ y.$$

4 Fonctions hyperboliques réciproques

Exercice 27 (Découverte de argch) Nous allons démontrer par deux méthodes différentes que ch et sh réalise des bijections sur des intervalles que l'on précisera. On notera argsh et argch les fonctions réciproques obtenues. Nous allons le faire pour ch, les preuves sont du même genre pour sh.

1. Expression logarithmique des fonctions réciproques
   (a) Au vu du graphe de ch , proposer deux intervalles I et J tels que ch $: I \to J$ soit bijective.
   (b) Méthode avec de «l'analyse» : prouver que ch est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.
   (c) Méthode avec de l'algèbre : $y \in J$. Résoudre dans I, l'équation $y = \text{ch}\ x$ (on pourra montrer que e^x est racine d'un polynôme de degré 2).
2. Démontrer à l'aide de la relation $\text{ch}^{\ 2} - \text{sh}^{\ 2} = 1$, que :
$$\forall t \geqslant 1,\ \text{sh}\ (\text{argch}\ (t)) = \sqrt{t^2 - 1}.$$
3. Démontrer que argch est dérivable sur un intervalle que l'on précisera et donner sa dérivée.
4. En déduire la valeur de $I = \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$.
5. Étudier et représenter argch .

Exercice 28 (Une étude de fonctions) Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \text{argch}\ (x^2 - 5x + 7).$$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ? Donner sa dérivée.
3. Sachant que $\text{argch}\ (t) = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$, donner un équivalent de argch en $+\infty$.
4. Terminer l'étude de f et préciser le comportement de f en $+\infty$.

Exercice 29 (Réciproque de Tangente hyperbolique) On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $\text{th} x = \dfrac{\text{sh}\ x}{\text{ch}\ x}$.

1. Justifier que th est dérivable, exprimer sa dérivée à l'aide de th puis de ch. En déduire que la fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser. On note argth sa fonction réciproque.
2. Étudier et représenter la fonction argth.