2017
UCBL

TD2 algèbre : systèmes linéaires, trace, symétries

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Exercice 2. Trouver les solutions de

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1. \end{cases}$$

Exercice 4. Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système :

$$(S) \begin{cases} (1+\lambda)x + y + z + t = a \\ x + (1+\lambda)y + z + t = b \\ x + y + (1+\lambda)z + t = c \\ x + y + z + (1+\lambda)t = d \end{cases}$$

Exercice 5 (Formule d'intégration numérique)**.** Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré $\leqslant 3$ on ait :

$$\int_2^4 P(x)\, dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$

Exercice 6. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 7. Que peut-on dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $\mathrm{tr}(A\,{}^t\!A) = 0$?

Exercice 8. Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \bar\alpha & \bar\alpha^2 \\ \alpha & 1 & \bar\alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbb{C}) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 (M antisymétrique $\Rightarrow I+M$ est inversible)**.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $I+M$ est inversible (si $(I+M)X=0$, calculer ${}^t(MX)(MX)$).
2. Soit $A=(I-M)(I+M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Exercice 10. $A=(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \, .$$

Montrer que A est inversible.

Indications 5. Écrire les polynômes sous la forme $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Calculer $\int_2^4 P(x)\ dx$ d'une part et $\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$ d'autre part. L'identification conduit à un système linéaire à quatre équations, d'inconnues α, β, γ.

Indications 6. Essayer avec X la matrice élémentaire E_{ij} (des zéros partout sauf le coefficient 1 à la i-ème ligne et la j-ème colonne).

Indications 7. Appliquer la formule du produit pour calculer les coefficients diagonaux de $A\ {}^tA$

Indications 9. M antisymétrique signifie ${}^tM = -M$.

1. Si Y est un vecteur alors ${}^tYY = \|Y\|^2$ est un réel positif ou nul.
2. $I - M$ et $(I+M)^{-1}$ commutent.

Indications 10. Prendre un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$, considérer le rang i_0 tel $|x_{i_0}| = \max \left\{ |x_i| \mid i = 1, ..., n \right\}$.

Correction 1. 1. Remarquons que comme le système est homogène (c'est-à-dire les coefficients du second membre sont nuls) alors $(0,0,0)$ est une solution du système. Voyons s'il y en a d'autres. Nous faisons semblant de ne pas voir que la seconde ligne implique $x=y$ et que le système est en fait très simple à résoudre. Nous allons appliquer le pivot de Gauss en faisant les opérations suivantes sur les lignes $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On fait maintenant $L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

En partant de la dernière ligne on trouve $z=0$, puis en remontant $y=0$, puis $x=0$. Conclusion l'unique solution de ce système est $(0,0,0)$.

2. On applique le pivot de Gauss $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

Puis $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$ pour obtenir un système équivalent qui est triangulaire donc facile à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 \\ y & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

On n'oublie pas de vérifier que c'est une solution du système initial.

3. On fait les opérations $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & 7y & + & z & = & 3c-a \end{array}\right.$$

Puis on fait $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, ce qui donne un système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & & & 54z & = & 5(3c-a)-7(3b+a) \end{array}\right.$$

En partant de la fin on en déduit : $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ puis en remontant cela donne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{18}(8a + 5b - c) \\ y & = & \frac{1}{18}(-2a + b + 7c) \\ z & = & \frac{1}{18}(-4a - 7b + 5c) \end{array} \right.$$

Correction 2. On commence par simplifier le système :

— on place la ligne L_3 en première position pour le pivot de Gauss ;

— on réordonne les variables dans l'ordre : y, t, x, z pour profiter des lignes déjà simples.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ 3y & + & 3t & & & + & z & = & 0 \\ -y & - & t & + & 2x & + & z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

On commence le pivot de Gauss avec les opération $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ pour obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ & & & - & 3x & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Les 3 dernières lignes sont identiques, on se ramène donc à un système avec 2 équations et 4 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Nous choisissons x et y comme paramètres, alors $z = -\frac{3}{2}x$ et $t = -x - y - z = \frac{1}{2}x - y$. Les solutions du système sont donc les

$$\left\{ \left(x, y, z = -\frac{3}{2}x, t = \frac{1}{2}x - y\right) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Correction 3. 1. Pour éviter d'avoir à diviser par a on réordonne nos lignes puis on applique la méthode du pivot :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & + & by & + & az & = & 1 & {\scriptstyle L_1} \\ x & + & aby & + & z & = & b & {\scriptstyle L_2} \\ ax & + & by & + & z & = & 1 & {\scriptstyle L_3} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & + & by & + & az & = & 1 & {\scriptstyle L_1} \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L} \\ & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - a} \end{array} \right.$$

On fait ensuite $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ pour obtenir un système triangulaire équivalent au système initial :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & + & az & = & 1 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ & & & & (2-a-a^2)z & = & b-a \end{array} \right.$$

2. Nous allons maintenant discuter de l'existence des solutions. Remarquons d'abord que $2-a-a^2 = -(a-1)(a+2)$. Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ alors $2-a-a^2 \neq 0$ donc $z = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$. On a donc trouvé la valeur de z. La deuxième ligne du système triangulaire est $b(a-1)y + (1-a)z = b-1$ on sait déjà $a-1 \neq 0$. Si $b \neq 0$ alors, en reportant la valeur de z obtenue, on trouve la valeur $y = \frac{b-1-(1-a)z}{b(a-1)}$. Puis avec la première ligne on en déduit aussi $x = 1 - by - az$.

   Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$ alors il existe une unique solution (x, y, z).

3. Il faut maintenant s'occuper des cas particuliers.

   (a) Si $a = 1$ alors notre système triangulaire devient :

   $$\begin{cases} x + by + z = 1 \\ 0 = b-1 \\ 0 = b-1 \end{cases}$$

   Si $b \neq 1$ il n'y a pas de solution. Si $a = 1$ et $b = 1$ alors il ne reste plus que l'équation $x + y + z = 1$. On choisit par exemple y, z comme paramètres, l'ensemble des solutions est

   $$\big\{(1-y-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\big\}.$$

   (b) Si $a = -2$ alors le système triangulaire devient :

   $$\begin{cases} x + by - 2z = 1 \\ -3by + 3z = b-1 \\ 0 = b+2 \end{cases}$$

   Donc si $b \neq -2$ il n'y a pas de solution. Si $a = -2$ et $b = -2$ alors le système est

   $$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{cases}$$

   Si l'on choisit y comme paramètre alors il y a une infinité de solutions

   $$\big\{(-1-2y, y, -1-2y) \mid y \in \mathbb{R}\big\}.$$

   (c) Enfin si $b = 0$ alors la deuxième et troisième ligne du système triangulaire sont : $(1-a)z = -1$ et $(2-a-a^2)z = -a$. Donc $z = \frac{-1}{1-a} = \frac{-a}{2-a-a^2}$ (le sous-cas $b = 0$ et $a = 1$ n'a pas de solution). Dans tous les cas il n'y a pas de solution.

   (d) Conclusion :

   — Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$, c'est un système de Cramer : il admet une unique solution.

— Si $a = 1$ et $b \neq 1$ il n'y a pas de solution (le système n'est pas compatible).
— Si $a = 1$ et $b = 1$ il y a une infinité de solutions (qui forment un plan dans $\mathbb{R}^3$).
— Si $a = -2$ et $b \neq -2$ il n'y a pas de solution.
— Si $a = -2$ et $b = -2$ il y a une infinité de solutions (qui forment une droite dans $\mathbb{R}^3$).
— Si $b = 0$ il n'y a pas de solution.

Correction 4. 1. On commence par simplifier le système en effectuant les opérations suivantes sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$:

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x & & & - & \lambda t & = & a-d \\ & \lambda y & & - & \lambda t & = & b-d \\ & & \lambda z & - & \lambda t & = & c-d \\ x \;+ & y \;+ & z & + & (1+\lambda)t & = & d \end{cases}$$

2. Traitons le cas particulier $\lambda = 0$. Si $\lambda = 0$ alors le système n'a des solutions que si $a = b = c = d$. Les solutions sont alors les (x, y, z, t) qui vérifie $x + y + z + t = d$. (C'est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.)
3. Si $\lambda \neq 0$ alors on peut faire l'opération suivante sur la dernière ligne : $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{\lambda}L_1 - \frac{1}{\lambda}L_2 - \frac{1}{\lambda}L_3$ pour obtenir :

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x & & & - & \lambda t & = & a-d \\ & \lambda y & & - & \lambda t & = & b-d \\ & & \lambda z & - & \lambda t & = & c-d \\ & & & & (\lambda+4)t & = & d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d) \end{cases}$$

4. Cas particulier $\lambda = -4$. La dernière ligne devient $0 = a + b + c + d$. Donc si $a + b + c + d \neq 0$ alors il n'y a pas de solutions.
Si $\lambda = -4$ et $a + b + c + d = 0$ alors existe une infinité de solutions :
$$\left\{ \left(t - \frac{a-d}{4}, t - \frac{b-d}{4}, t - \frac{c-d}{4}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$
5. Cas général : $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$. On calcule d'abord $t = \frac{1}{\lambda+4}\left(d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d)\right)$ et en remplaçant par la valeur de t obtenue on en déduit les valeurs pour $x = t + \frac{1}{\lambda}(a-d), y = t + \frac{1}{\lambda}(b-d), z = t + \frac{1}{\lambda}(c-d)$. Il existe donc une solution unique :
$$\left(\frac{(\lambda+3)a-b-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)b-a-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)c-a-b-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)d-a-b-c}{\lambda(\lambda+4)} \right).$$

Correction 5. Notons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme de degré $\leqslant 3$.

1. Tout d'abord calculons l'intégrale :

$$\int_2^4 P(x)\,dx = \left[a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + dx\right]_2^4 = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d.$$

2. D'autre part

$$\alpha P(2)+\beta P(3)+\gamma P(4) = \alpha\big(8a+4b+2c+d\big)+\beta\big(27a+9b+3c+d\big)+\gamma\big(64a+16b+4c+d\big).$$

Donc

$$\alpha P(2)+\beta P(3)+\gamma P(4) = (8\alpha+27\beta+64\gamma)a+(4\alpha+9\beta+16\gamma)b+(2\alpha+3\beta+4\gamma)c+(\alpha+\beta+\gamma)d.$$

3. Pour avoir l'égalité $\int_2^4 P(x)\,dx = \alpha P(2)+\beta P(3)+\gamma P(4)$ quelque soit les coefficients a, b, c, d il faut et il suffit que

$$(8\alpha+27\beta+64\gamma)a+(4\alpha+9\beta+16\gamma)b+(2\alpha+3\beta+4\gamma)c+(\alpha+\beta+\gamma)d = 60a+\frac{56}{3}b+6c+2d$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ 2\alpha & + & 3\beta & + & 4\gamma & = & 6 \\ 4\alpha & + & 9\beta & + & 16\gamma & = & \frac{56}{3} \\ 8\alpha & + & 27\beta & + & 64\gamma & = & 60 \end{array}\right.$$

De façon surprenante ce système à 3 inconnues et 4 équations a une solution unique :

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{4}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}.$$

Correction 6. Notons E_{ij} la matrice élémentaire (des zéros partout sauf le coefficient 1 à la i-ème ligne et la j-ème colonne).
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$A \times E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \cdots & & \vdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ji} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \cdots & & \vdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

La seule colonne non nulle est la j-ème colonne.
La trace est la somme des éléments sur la diagonale. Ici le seul élément non nul de la diagonale est a_{ji}, on en déduit donc

$$\mathrm{tr}(A \times E_{ij}) = a_{ji}$$

(attention à l'inversion des indices).
Maintenant prenons deux matrices A, B telles que $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$ pour toute matrice X. Alors pour $X = E_{ij}$ on en déduit $a_{ji} = b_{ji}$. On fait ceci pour toutes les matrices élémentaires E_{ij} avec $1 \leqslant i, j \leqslant n$ ce qui implique $A = B$.

Correction 7. Notons $A = (a_{ij})$, notons $B = {}^tA$ si les coefficients sont $B = (b_{ij})$ alors par définition de la transposée on a $b_{ij} = a_{ji}$.
Ensuite notons $C = A \times B$ alors par définition du produit de matrices le coefficients c_{ij} de C s'obtient par la formule :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Appliquons ceci avec $B = {}^tA$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}.$$

Et pour un coefficient de la diagonale on a $i = j$ donc

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2.$$

La trace étant la somme des coefficients sur la diagonale on a :

$$\mathrm{tr}(A\ {}^tA) = \mathrm{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = \sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} a_{ik}^2.$$

Si on change l'indice k en j on obtient

$$\mathrm{tr}(A\ {}^tA) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2.$$

Donc cette trace vaut la somme des carrés de tous les coefficients.
Conséquence : si $\mathrm{tr}(A\ {}^tA) = 0$ alors la somme des carrés $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2$ est nulle donc chaque carré a_{ij}^2 est nul. Ainsi $a_{ij} = 0$ (pour tout i, j) autrement dit A est la matrice nulle.

Correction 8. 1. si le déterminant $ad - bc$ est non nul l'inverse est $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2. $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3. si $|\alpha| \neq 1$ alors l'inverse est $\frac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha\bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$

4. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ & & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & (0) & & 1 & -2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

Correction 9. Avant de commencer la résolution nous allons faire une remarque importante : pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur (considéré comme une matrice à une seule colonne) alors nous allons calculer ${}^tXX$:

$$ {}^tXX = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. $$

On note $\|X\|^2 = {}^tXX$: $\|X\|$ est la *norme* ou la *longueur* du vecteur X. De ce calcul on déduit d'une part que ${}^tXX \geqslant 0$. Et aussi que ${}^tXX \geqslant 0$ si et seulement si X est le vecteur nul.

1. Nous allons montrer que $I + M$ est inversible en montrant que si un vecteur X vérifie $(I + M)X = 0$ alors $X = 0$.

   Nous allons estimer ${}^t(MX)(MX)$ de deux façons. D'une part c'est un produit de la forme ${}^tYY = \|Y\|^2$ et donc ${}^t(MX)(MX) \geqslant 0$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
{}^t(MX)(MX) &= {}^t(MX)(-X) \quad \text{car } (I+M)X = 0 \text{ donc } MX = -X \\
&= {}^tX{}^tM(-X) \quad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB{}^tA \\
&= {}^tX(-M)(-X) \quad \text{car } {}^tM = -M \\
&= {}^tXMX \\
&= {}^tX(-X) \\
&= -{}^tXX \\
&= -\|X\|^2
\end{aligned}$$

Qui est donc négatif.
Seule possibilité $\|X\|^2 = 0$ donc $X = 0$ ($=$ le vecteur nul) et donc $I + M$ inversible.

2. (a) Calculons A^{-1}.

$$A^{-1} = \big((I-M)\times(I+M)^{-1}\big)^{-1} = \big((I+M)^{-1}\big)^{-1}\times(I-M)^{-1} = (I+M)\times(I-M)^{-1}$$

(n'oubliez pas que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$).

(b) Calculons ${}^tA$.

$$\begin{aligned}
{}^tA &= {}^t\big((I-M)\times(I+M)^{-1}\big) \\
&= {}^t\big((I+M)^{-1}\big)\times{}^t(I-M) \qquad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB{}^tA \\
&= \big({}^t(I+M)\big)^{-1}\times{}^t(I-M) \qquad \text{car } {}^t(A^{-1}) = \big({}^tA\big)^{-1} \\
&= \big(I+{}^tM)\big)^{-1}\times(I-{}^tM) \qquad \text{car } {}^t(A+B) = {}^tA+{}^tB \\
&= (I-M)^{-1}\times(I+M) \qquad \text{car ici } {}^tM = -M
\end{aligned}$$

(c) Montrons que $I + M$ et $(I - M)^{-1}$ commutent.
Tout d'abord $I + M$ et $I - M$ commutent car $(I + M)(I - M) = I - M^2 = (I - M)(I + M)$. Maintenant nous avons le petit résultat suivant :
Lemme. Si $AB = BA$ alors $AB^{-1} = B^{-1}A$.
Pour la preuve on écrit :

$$AB = BA \Rightarrow B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1} \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}.$$

En appliquant ceci à $I + M$ et $I - M$ on trouve $(I + M) \times (I - M)^{-1} = (I - M)^{-1} \times (I + M)$ et donc $A^{-1} = {}^tA$.

Correction 10. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur tel que $AX = 0$. Nous allons montrer qu'alors X est le vecteur nul ce qui entraîne que A est inversible.
Par l'absurde supposons $X \neq 0$. Alors, si i_0 est un indice tel que $|x_{i_0}| = \max\left\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\right\}$, on a $|x_{i_0}| > 0$.
Mais alors comme $AX = 0$ on a pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0$$

donc

$$|a_{i_0,i_0} x_{i_0}| = \left| - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|.|x_j| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$$

et, puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$ contredisant les hypothèses de l'énoncé. Ainsi $X = 0$. On a donc prouvé «$AX = 0 \Rightarrow X = 0$» ce qui équivaut à A inversible.