**Partiel du 23 mars 2016 : corrigé rapide**

**1.** (a) Calculer l'aire $A$ sous le graphe de la fonction $x \mapsto x \ln x$ entre $x = 1$ et $x = e$.

(b) Vérifier que $A < 10/4$.

Intégration par parties : $\displaystyle\int_1^e x \ln x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{1}{4}\left(e^2+1\right) < \frac{1}{4}\left(3^2+1\right) = 10/4.$

**2.** L'équation différentielle logistique vue en cours décrit l'évolution d'une population biologique $y(t)$. Résoudre le cas particulier suivant de l'équation : $y' = y(4-y), \quad y(0) = 2$ et trouver $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Comme dans CM5 : $\displaystyle\frac{dy}{y(4-y)} = \frac{1}{4}\left\{ \frac{dy}{y} + \frac{dy}{4-y} \right\} = dt \implies \frac{1}{4}\ln y - \frac{1}{4}\ln(4-y) = t + C \implies C = 0.$

On trouve $y = \dfrac{4e^{4t}}{1+e^{4t}}$ et alors $\lim_{t\to\infty} y(t) = 4.$

**3.** (a) Justifier que l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3\theta \, d\theta$ est bien définie. (b) Calculer $I$.

On a $\cos\theta > 0$ sur $[0, \pi/4] \implies \tan^3\theta$ est continue sur $[0, \pi/4] \implies I$ bien définie.

On calcule $I = \left[ \ln(\cos\theta) + \frac{1}{2\cos^2\theta} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$ (voir CM5, p. 13) $= \frac{1}{2}\left(1 - \ln 2\right)$.

**4.** (a) Déterminer $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3-x^2}\, dx$.

(b) Prouver que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x-2}{x^3-x^2}\, dx$ converge, et trouver sa valeur.

$$\int \frac{x-2}{x^3-x^2}\, dx = \int \left\{ \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x-1} \right\} dx = \ln|x| - \frac{2}{x} - \ln|x-1| + C \implies \int_2^\infty = 1 - \ln 2.$$

**5.** (a) Pourquoi l'intégrale $J := \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ est-elle impropre ?

(b) Étudier l'éventuelle convergence de $J$, et calculer sa valeur si celle-ci existe.

L'intégrale est impropre car la fonction intégrée admet un asymptote vertical en $x = 0$ (tend vers $+\infty$). Avec le changement de variable $x = y^6$ (voir feuille de primitives, exo (h)) on trouve

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int_{\varepsilon^{1/6}}^1 \frac{y^3}{1+y}\, dy = 6\left[ \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + y - \ln(1+y) \right]_{\varepsilon^{1/6}}^1 =$$

$$5 - 6\ln 2 - 6\left\{ \tfrac{1}{3}\varepsilon^{1/2} - \tfrac{1}{2}\varepsilon^{1/3} + \varepsilon^{1/6} - \ln(1+\varepsilon^{1/6}) \right\} \to 5 - 6\ln 2 \text{ quand } \varepsilon \downarrow 0.$$

**Remarque.** On peut prouver la convergence de l'intégrale sans trouver la primitive, par exemple en la comparant à l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.