

**Math Analyse II Cours de Francis Clarke Partiel du 23 mars 2016**

*L'utilisation de documents de toute nature, de calculatrices, de téléphones ou autres appareils électroniques n'est pas autorisée. Les exercices sont tous du même poids.*

1. (a) Calculer l'aire  $A$  sous le graphe de la fonction  $x \mapsto x \ln x$  entre  $x = 1$  et  $x = e$ .

(b) Prouver que  $A < 10/4$ .

2. L'équation différentielle logistique vue en cours décrit l'évolution d'une population biologique  $y(t)$ . Résoudre le cas particulier suivant de l'équation :

$$y' = y(4 - y), \quad y(0) = 2,$$

et trouver  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ .

3. (a) Justifier que l'intégrale  $I := \int_0^{\pi/4} \tan^3 \theta \, d\theta$  est bien définie.

(b) Calculer  $I$ .

4. (a) Déterminer  $\int \frac{x-2}{x^3-x^2} \, dx$ .

(b) Prouver que l'intégrale impropre  $\int_2^{\infty} \frac{x-2}{x^3-x^2} \, dx$  converge, et trouver sa valeur.

5. (a) Pourquoi l'intégrale  $J := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$  est-elle impropre ? [Rq :  $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ .]

(b) Étudier l'éventuelle convergence de  $J$ , et calculer sa valeur si celle-ci existe.