Analyse II : Intégration et approximation

MAT1009L / séquence 4 / printemps 2016

cours de Francis Clarke

CM9 :

1. Le polynôme de Taylor
2. Les développements limités
3. DL d'une somme, d'un produit
4. Le DL d'une fonction composée
5. Ce qu'il y aura sur le DS 2

Analyse II Calendrier 2016 (les mercredi)

27 janvier	cours	TD	
3 février	cours	TD	
10 février	cours	TD	
17 février	cours	TD	← DS1
~~24 février~~	~~cours~~	~~TD~~	(congé de travail intensif chez soi)
2 mars	cours	TD	
9 mars	cours	TD	
~~16 mars~~	~~cours~~	~~TD~~	(CC en commun, on ne participe pas)
23 mars	cours	TD	← partiel 1
30 mars	cours	TD	
6 avril	cours	TD	
13 avril	cours	TD	← DS 2
~~20 avril~~	~~cours~~	~~TD~~	(congé de travail intensif chez soi)
27 avril	cours	TD	
4 mai	cours	TD	← partiel 2

CC final : entre le 30 mai et le 8 juin

Le cours est en trois parties :

1. Intégration
2. Fonctions élémentaires
3. Développements limités et approximation

rappel

On a vu que les logarithmes permettent de réduire de longs calculs (multiplication, division, racine) en simple addition et soustraction

$$\frac{a}{b} \ ? \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Mais comment calculer les logarithmes nécessaires à la méthode?

Euler trouve

$e \approx 2{,}718281828459045235360 28$

Comment fait-il?

un grand calculateur

Votre calculette actuelle (bien plus petite) vous dit que

$$\pi = 3,1415926$$

et

$$\sin 1 = 0,84147098$$

Comment fait-elle?

calcul des logarithmes

Fait: Nous savons, depuis longtemps, calculer les racines carrées à la main exemple

Calculer $\sqrt{645}$

```
         5 . 3   9
       √6.45.00.00
       - 4
(45)     2
       - 225
   (503)20 00
       - 15 09
(506_)     491 00
```

$(25{,}39)^2 = 644{,}7$

$(25{,}397)^2 = 645{,}01$

Avant Euler, afin de calculer les logarithmes, on utilise la **méthode de la passoire:**

On sait que $\log 10 = 1{,}0000000$

On calcule $\sqrt{10} = 3{,}1622777$

Mais $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}\log 10 = 0{,}50000000$

Donc $\log 3{,}1622777 = 0{,}50000000$

On trouve ensuite

$$\sqrt{3{,}1622777} \approx 1{,}7782794$$

dont le logarithme vaut $0{,}2500000$

	nombre	logarithme
	10	1
$10^{1/2}$	3,1622777	0,50000000
$10^{1/4}$	1,7782794	0,25000000
$10^{1/8}$	1,3335214	0,12500000
⋮	⋮	⋮
$10^{1/2048}$	1,0011249	0,00048828
$10^{1/4096}$	1,0005623	0,00024414
$10^{1/8192}$	1,0002811	0,00012207

$(8192 = 2^{13})$ $\quad \lim_{k\to\infty} 10^{1/k} = 1$

une passoire

nombre	logarithme
10	1
3,1622777	0,50000000
1,7782794	0,25000000
1,3335214	0,12500000
⋮	⋮
1,0011249	0,00048828
1,0005623	0,00024414
1,0002811	0,00012207

On veut calculer log 5

On prend des racines carrées successives :

$$\sqrt{5} = 2,2360680 \qquad \sqrt{\sqrt{5}} = 1,4953488\ldots$$

$$\vdots$$

$$5^{1/4096} = 1,0003930$$

$$(2^{12} = 4096)$$

la passoire

$\boxed{5^{1/4096} = 1,0003930}$

nombre	logarithme
10	1
3,1622777	0,50000000
1,7782794	0,25000000
1,3335214	0,12500000
⋮	⋮
1,0011249	0,00048828
1,0005623	0,00024414
1,0002811	0,00012207
	$\approx 0,000170646$

Par interpolation linéaire,
on calcul le logarithme de $5^{1/4096}$

$$\approx 0,000170646$$

$$\log 5^{1/4096} = \frac{1}{4096}\log 5 \approx 0,000170646$$

$$\Longrightarrow \quad \log 5 \approx 0,698966$$

$$(\text{En fait, } \log 5 = 0,698970)$$

Astucieux, mais quel effort!

Une innovation due à Isaac Newton:

le binôme de Newton

rappel Les coefficients binomiaux usuels sont définis par

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

$$= \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}\,,$$

où p et k sont des entiers positifs, $k \leqslant p$.

Notons toutefois que la deuxième formule a un sens même si p n'est pas un entier. On a (par convention) $\binom{p}{0} = 1$.

Exemple.

$$\binom{3}{0} = 1,\ \binom{3}{1} = 3,\ \binom{3}{2} = 3,\ \binom{3}{3} = 1$$

$$\Longrightarrow\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

binôme de Newton

$$\begin{aligned}(1+x)^p &= 1 + p\,x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}x^k + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}x^k \text{ où } \binom{p}{k} := \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!},\ \binom{p}{0} = 1\,. \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \quad \text{si } p = n \in \mathbb{N}^*\end{aligned}$$

Cette série s'appelle *le binôme de Newton*; notons séparément trois cas spéciaux qui sont souvent utiles:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \ldots \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \ldots \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \ldots.\end{aligned}$$

application aux racines carrées

exemple: $\sqrt{5}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \ldots.$$

la série converge si |x| < 1...

On ne peut pas mettre $x = 4$ afin de calculer $\sqrt{5}$:

$$\sqrt{1+4} = 1 + \frac{1}{2}4 - \frac{1}{8}4^2 + \frac{1}{16}4^3 - \ldots.$$

on fait $\sqrt{5} = \sqrt{4 \times \frac{5}{4}} = 2 \times \sqrt{1 + 0,25}$

$$\approx 2 \times \left\{1 + \frac{1}{2}(0,25) - \frac{1}{8}(0,25)^2 + \frac{1}{16}(0,25)^3\right\}$$

$$\approx 2,236$$

Alors $2,236 \times 2,236 = 5,000$.

Plutôt que de passer par la passoire et ses racines carrées, Euler développe des approximations par des polynômes

Euler: approximation par les polynômes

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \ln 2 = 0,693135 \ \ (\text{mettre } x = 1/3)$$

6 termes de la série

$$\Longrightarrow \quad \ln(5/4) = 0,223143 \ \ (\text{mettre } x = 1/9)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\ln 5 = \ln(5/4) + \ln 4 = \ln(5/4) + 2\ln 2 = 1,609413$$

Nous allons expliquer la provenance et l'utilisation de cette approche (et du binôme de Newton)

On commence par un théorème de Cauchy

Augustin-Louis Cauchy

1789 - 1857

Protégé de Lagrange, professeur à l'Ecole Polytechnique, baron, auteur de 800 articles... Son nom est un des 72 inscrits sur la Tour Eiffel.

Mais surtout, inventeur de l'argument epsilon-delta.

L'extension suivante du théorème des accroissements finis nous sera utile.

Théorème (de Cauchy). Soient f et g des fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables dans $]a,b[$ telles que g' ne s'annule pas dans $]a,b[$. Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Remarque. On a $g(a) \neq g(b)$, car autrement il y aurait un point dans $]a,b[$ tel que $g'(z) = 0$ (par le théorème des accroissements finis usuel).

En prenant $g(x) = x$ dans le théorème ci-dessus, on obtient

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1},$$

c-à-d, justement le théorème des accroissements finis usuel.

Remarque. Par le théorème des accroissements finis usuel, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

De même, il existe $d \in]a,b[$ tel que

$$g(b) - g(a) = g'(d)(b-a),$$

d'où

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(d)}.$$

Ceci donnerait la conclusion recherchée, si l'on savait que $c = d$ ...

Théorème (de Cauchy). Soient f et g des fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables dans $]a,b[$ telles que g' ne s'annule pas dans $]a,b[$. Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration (de Cauchy). Soit h la fonction

$$h(x) := f(x)\big[g(b)-g(a)\big] - g(x)\big[f(b)-f(a)\big].$$

On trouve

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a)\big[g(b)-g(a)\big] - g(a)\big[f(b)-f(a)\big] \\ &= f(a)g(b) - g(a)f(b) \\ &= f(b)\big[g(b)-g(a)\big] - g(b)\big[f(b)-f(a)\big] \\ &= h(b). \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe c dans $]a,b[$ tel que

$$0 = h'(c) = f'(c)\big[g(b)-g(a)\big] - g'(c)\big[f(b)-f(a)\big].$$

Application aux limites: la règle de l'Hospital

Quand $f(a) = g(a) = 0$, le théorème suivant (dû à Jean Bernoulli, mais portant le nom du marquis qui lui apportait son patronage) est un outil qui sert dans certains cas à lever l'indétermination du quotient f/g en a.

Théorème (Règle de l'Hospital) Soit I un intervalle ouvert contenant le point a. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $I\setminus\{a\}$ telles que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0\,,$$

et supposons de plus que $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ existe. Alors $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ existe, et

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

L'énoncé du théorème sous-entend que $g'(x) \neq 0$

Le théorème comprend les cas où $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$.

exemple

Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\,.$$

On vérifie que la règle de l'Hospital s'applique.
On observe que

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

exemple

Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x^3)}\,.$$

On vérifie que la règle de l'Hospital s'applique.

On observe que

$$\lim_{x\to 0} \frac{[e^x - 1]'}{[\sin(x^3)]'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{3x^2\cos(x^3)}$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x^3)} = +\infty.$$

Remarque. On a $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, mais $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas.

exemple

L'argument suivant prétend calculer la première limite ci-dessous par la règle de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3\,.$$

pas indéterminée

Pourtant, la limite ne vaut pas 3.

La trouver, en expliquant l'erreur.

On a plutôt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \frac{4}{-1} = -4\,.$$

La dernière grande idée du cours:

approximation d'une fonction f par des polynômes

binôme de Newton

$$
\begin{aligned}
(1+x)^p &= 1 + p\,x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}x^k + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k \quad \text{où} \quad \binom{p}{k} := \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}, \quad \binom{p}{0} = 1\,. \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad \text{si } p = n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}
$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \ldots.$$

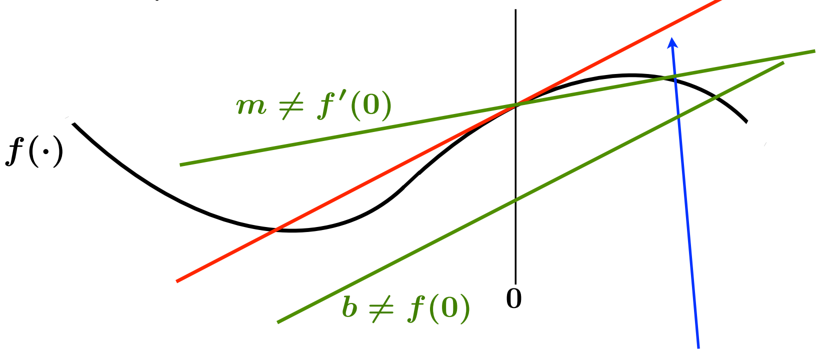
la série converge si |x| < 1...

Euler: approximation par les polynômes

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\ldots\right\}$$

Comment?

La dérivée correspond à une approximation (locale) par une fonction affine



la droite (tangente) $x \mapsto b + mx$

m = le coefficient directeur de la droite = $f'(0)$

$b = f(0)$

L'approximation est bonne en 0 au sens que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - [\, f'(0)x + f(0)]}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - f'(0) \;=\; 0.$$

Posons $P_1(x) \;:=\; f(0) + f'(0)x$,
un polynôme de degré un. Alors on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x} \;=\; 0,$$

et aucun autre polynôme de degré un possède cette propriété.

Posons $P_1(x) \;:=\; f(0) + f'(0)x$,
un polynôme de degré un. Alors on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x} \;=\; 0.$$

Passons maintenant à l'ordre deux.

Quel serait le polynôme $P(x)$ tel que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^2} \;=\; 0?$$

Ceci est plus exigeant, demande une meilleure approximation

Cherchons un tel polynôme $P(x)$ d'ordre deux:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - [\, ax^2 + bx + c\,]}{x^2} \;=\; 0?$$

Forcément $c = f(0)$. Alors la limite coïncide avec

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x} - [\, ax + b\,]}{x} \;=\; 0\,?$$

Le numérateur doit tende vers 0 $\implies b \;=\; f'(0)$.

La règle de l'Hospital peut-elle alors s'appliquer?

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - ax^2}{x^2}$$

Théorème (Règle de l'Hospital) Soit I un intervalle ouvert contenant le point α. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $I\setminus\{\alpha\}$ telles que

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\alpha} g(x) \;=\; 0\,,$$

et supposons de plus que $\lim_{x\to\alpha} f'(x)/g'(x)$ existe. Alors $\lim_{x\to\alpha} f(x)/g(x)$ existe, et

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Résumé à ce point :

Le polynôme d'ordre un qui donne la meilleure approximation locale de f autour de 0 est

$$P_1(x) \;=\; f(0) + f'(0)x.$$

On a

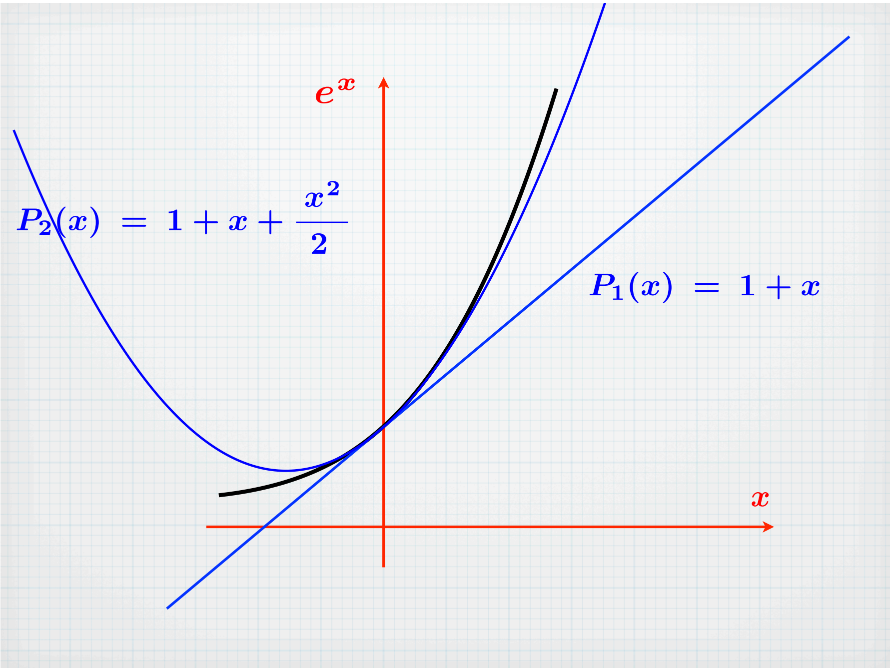
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x} \;=\; 0.$$

Le polynôme d'ordre deux qui donne la meilleure approximation locale de f autour de 0 est

$$P_2(x) \;=\; f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_2(x)}{x^2} \;=\; 0.$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x} \;=\; 0 \iff f(x) - P_1(x) \;=\; o(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_2(x)}{x^2} \;=\; 0 \iff f(x) - P_2(x) \;=\; o(x^2)$$

Notation de Landau. On écrit

$$h \;=\; o_\alpha(g)\,, \quad \text{ou} \quad h(x) \;=\; o_\alpha(g(x))\,,$$

lorsque

$$\lim_{x\,\to\,\alpha} \frac{h(x)}{g(x)} \;=\; 0\,.$$

(Ceci présuppose que $g(x) \neq 0$ lorsque $x \neq \alpha$ est suffisamment proche de α.)

On dit dans ce cas que h est *négligeable* devant g au point α, ou encore: h est petit o de g en α.

On écrit aussi $o(g)$ au lieu de $o_\alpha(g)$ lorsque le choix de α est évident à cause du contexte.

Le plus souvent, on prendra $\alpha = 0$ et $g(x) \;=\; x^k$.

Remarques sur le petit o de Landau

La notation $o(x^p)$ fait référence à la *classe* des fonctions $\theta(x)$ ayant la propriété que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\theta(x)}{x^p} \;=\; 0.$$

On dit que f est petit o (en 0) de x^p lorsque $f \in o(x^p)$.

Il est clair que cette classe est stable sous l'addition:

$$\theta_1 \in o(x^p),\ \theta_2 \in o(x^p) \implies \theta_1 + \theta_2 \in o(x^p).$$

On a aussi $g(x) \times o(x^p) \;=\; o(x^p)$, lorsque g est une fonction qui est bornée autour de 0.

Il est clair qu'une fonction h qui est petit o de x^6 est aussi petit o de x^5; c-à-d, $o(x^6) \subset o(x^5)$.

Mais *pas* vice versa.

On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^6} = 0$$

Il vient

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^6} \times x = 0 \times 0 = 0$$

Exemple: si la fonction g est de la forme

$$g(x) = x^4 + e^x x^3 - x^{16} + o(x^3),$$

on peut en déduire que g est petit o de x^2, et l'on écrit $g = o(x^2)$. Mais on ne peut pas déduire que g est petit o de x^3, et encore moins x^4.

Approximation d'ordre un et deux

La fonction f étant suffisamment lisse autour de 0, on a

$$f(x) \;=\; P_1(x) + o(x), \quad \text{où } P_1(x) \;=\; f(0) + f'(0)x$$

ainsi que

$$f(x) \;=\; P_2(x) + o(x^2),$$

$$\text{où } P_2(x) \;=\; f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Quand la deuxième caractérisation a lieu, elle implique la première, car

$$\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \;\subset\; o(x).$$

Maintenant on considère l'approximation polynomiale d'ordre n quelconque

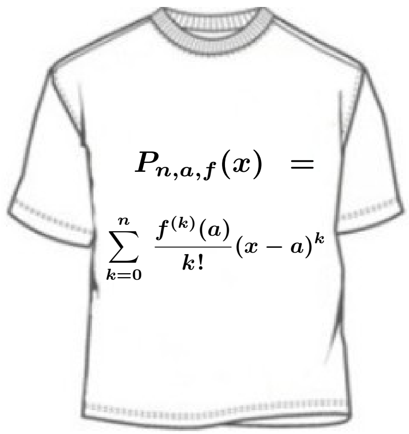
Soit f une fonction n fois dérivable en un point a. Le *polynôme de Taylor* d'ordre n de la fonction f au point a veut dire le polynôme suivant:

$$P_{n,a,f}(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

où $k!$ est le *factoriel* de k, c-à-d $k! \;=\; k(k-1)\cdots(2)(1)$, et où $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f. Par convention, $0! = 1$ et $f^{(0)} = f$.

Donc, par exemple, on a

$$\begin{aligned} P_{4,0,f}(x) \;&=\; f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &\quad + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''''(0)}{24}x^4 \\ &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \end{aligned}$$



terminologie

Lorsque que l'on a

$$f(x) \;=\; P_n(x) + o_a\big((x-a)^n\big),$$

où P_n est un polynôme d'ordre n ou moins, on dit que f admet un *développement limité* d'ordre n au point a.

Le polynôme P_n en est la *partie polynomiale.*

Le terme $R_n := f - P_n$ est le *reste.* Donc on a

$$f(x) \;=\; P_n(x) + R_n(x)\,,$$

où le reste R_n est négligeable devant $(x-a)^n$ au point a.

En conséquent, P_n est *une approximation locale de* f *en* a *d'ordre* n.

$$P_{n,a,f}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Définition

Soit f une fonction qui, dans un voisinage de a, admet des dérivées de tout ordre.

L'expression (formelle) suivante est appelée la série de Taylor de f en a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Remarque

En général, cette série (impropre!) aura une valeur numérique bien définie lorsque x est suffisamment proche de a...

existence et unicité d'un développement limité d'ordre n

Théorème (Formule de Taylor-Young) Soit f une fonction de classe C^n dans un voisinage du point a, où $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le polynôme de Taylor $P_n = P_{n,a,f}$ satisfait

$$f(x) \;=\; P_n(x) + o_a\big((x-a)^n\big),$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} \;=\; 0\,.$$

Le polynôme de Taylor $P_{n,a,f}$ est le seul polynôme de degré n ou moins qui possède cette propriété.

Démonstration. Dans un premier temps, on veut montrer que $P = P_{n,a,f}$ satisfait

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} \;=$$

$$\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - (f''(a)/2)(x-a)^2 - (f'''(a)/6)(x-a)^3 - \ldots}{(x-a)^n}$$

$$= \; 0\,.$$

Ceci suit de la règle de l'Hospital appliquée $n-1$ fois: prenant $n-1$ dérivées, le numérateur devient

$$f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)\,,$$

le dénominateur devient $n!(x-a)$. Alors on écrit

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!}\left\{\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - f^{(n)}(a)\right\},$$

ce qui tend visiblement vers 0 lorsque x tend vers a, par la définition même de $f^{(n)}(a)$.

L'unicité. Si P et Q sont deux polynômes de degré n ou moins qui satisfont

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0\,,$$

alors $g := P - Q$ est un polynôme de degré n ou moins tel que

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0\,,$$

c-à-d, on a $P - Q = o_a\big((x-a)^n\big)$. Ensuite le lemme suivant complète la démonstration.

Lemme. Si g est un polynôme de degré n ou moins tel que $g(x) = o_a((x-a)^n)$, alors g est zéro.

Lemme. Si g est un polynôme de degré n ou moins tel que $g(x) = o_a((x-a)^n)$, alors g est zéro.

Démonstration. On peut toujours écrire g de la forme

$$g(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots c_m(x-a)^m\,,$$

où $m \leqslant n$. On a par hypothèse

$$\lim_{x \to a} \frac{c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots c_m(x-a)^m}{(x-a)^n} = 0\,.$$

Donc le numérateur doit tendre vers 0 $\implies c_0 = 0$. On a alors

$$\lim_{x \to a} \frac{c_1 + c_2(x-a) + \dots c_m(x-a)^{m-1}}{(x-a)^{n-1}} = 0\,.$$

Donc le numérateur doit tendre vers 0 $\implies c_1 = 0$. On continue de cette façon, jusqu'à $c_m = 0$. $\blacksquare$

calcul des DL

Remarque.

On peut toujours ramener le calcul au cas $a = 0$.

Car si on veut le DL d'ordre 3 (disons) de f en a, posons $\hat{f}(x) := f(a+x)$; soit ensuite

$$\hat{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$$

le DL de $\hat{f}$ d'ordre 3 en 0.

Alors le DL de f d'ordre 3 en a est donné par

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + o((x-a)^3)$$

$$P_{n,a,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

exemple

Calculer le développement limité en 0 et d'ordre 3 de la fonction $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 13x + 9$.

Réponse: $9 - 13x - 7x^2 + 4x^3 + o(x^3)$, car la fonction a visiblement cette forme (et on a unicité).

Remarque : Un DL d'ordre inférieur est obtenu
exemple **par simple troncation**

Soit

$f(x) = P_{4,0,f}(x) + o(x^4) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o(x^4)$

le DL en 0 d'ordre 4 de f (que nous prenons quatre fois dérivable).

Quel est le DL en 0 d'ordre 3 de f?

On a

$$f(x) = \underbrace{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)}_{\substack{P(x)\\ \text{(degré 3}\\ \text{ou moins)}}} + \underbrace{(a_4x^4 + o(x^4))}_{= o(x^3)}$$

Par l'affirmation d'unicité dans le théorème Taylor-Young, il suit que $P(x)$ est justement $P_{3,0,f}(x)$

La conclusion suit aussi de la façon que les a_i sont calculés.

exemple

Calculer le développement limité en 0 et d'ordre 2 de la fonction

$$x^3e^x + x.$$

Réponse: $x + o(x^2)$,
car la fonction a visiblement cette forme
(et on a unicité).

calcul des DL
première méthode: calcul direct

Calculer le développement limité en 0 et d'ordre 6 de la fonction e^x.

$$P_{n,a,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

On a $f(x) = e^x$, d'où

$$f^{(k)}(x) = f(x)\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Puisque $f(0) = 1 = f^{(k)}(0)$, la partie polynomiale du développement est alors

$$P_{6,0,f}(x) = 1 + \tfrac{1}{1}\,x + \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{6}\,x^3 + \tfrac{1}{24}\,x^4 + \tfrac{1}{120}\,x^5 + \tfrac{1}{720}\,x^6$$

et le DL recherché est

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{6}\,x^3 + \tfrac{1}{24}\,x^4 + \tfrac{1}{120}\,x^5 + \tfrac{1}{720}\,x^6 + o(x^6)$$

De façon plus générale on a

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{o(x^n)}_{R_n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)
\end{aligned}
$$

DL de sinus en 0

Pour $f(x) = \sin x$, la suite $f^{(k)}(x)$ $(k \geqslant 0)$ est donnée par

$\sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ \sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x, \ldots$

En $x = 0$ ceci devient

$$0,\ 1,\ 0,\ -1, /\ 0,\ 1,\ 0,\ -1, /\ \ldots$$

Donc les termes paires du DL sont absents. On trouve alors

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

remarque

Les DL d'ordre $2n+2$ et d'ordre $2n+1$ sont essentiellement les mêmes.

Par exemple, on peut écrire le DL d'ordre 6:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

ou le DL d'ordre 5:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

DL de cosinus en 0

De façon similaire à $\sin x$, on calcule le DL en 0 de $\cos x$:

$$
\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})
\end{aligned}
$$

Ici, seulement les termes paires figurent.

Proposition (parité)

Soit $P = P_{n,0,f}$ le polynôme de Taylor d'ordre n en 0 d'une fonction f. Si f est une fonction paire, alors P comporte des puissances paires seulement; si f est une fonction impaire, alors P comporte des puissances impaires seulement.

Démonstration. Quand f est paire, on a

$$f(-x) \;=\; f(x) \;\;\forall\, x \quad\Longrightarrow\quad -f'(-x) \;=\; f'(x).$$

Posant $x = 0$, il vient $f'(0) = 0$.
autres dérivées d'ordre impaire. Il suit que les coefficients des puissances impaires dans le polynôme de Taylor sont tous 0. Un raisonnement analogue s'applique au cas d'une fonction impaire. $\blacksquare$

DL de ln(1+x) en 0

Pour $f(x) \;=\; \ln(1+x)$, la suite $f^{(k)}(x)$ $(k \geqslant 0)$ est donnée par

$$\ln(1+x),\ (1+x)^{-1},\ -(1+x)^{-2},\ 2(1+x)^{-3},$$

$$-\,6(1+x)^{-4},\ 24(1+x)^{-5},\ -120(1+x)^{-6}\dots$$

En $x = 0$ ceci devient

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -6,\ 24,\ -120,\ \dots$$

On trouve alors

$$\ln(1+x) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\,\frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

Le binôme de Newton.

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}\,x^n + o(x^n) \;\; (p \in \mathbb{R} \text{ fixé})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} x^k + o(x^n), \;\; \text{où} \; \binom{p}{k} := \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}, \;\; \binom{p}{0} = 1\,.$$

Trois cas spéciaux :

$$p = -1 : \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$p = -1, x \to -x : \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$p = \tfrac{1}{2} : \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

Développements limités très souvent rencontrés (1).

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$e^{\,x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

Développements limités très souvent rencontrés (2).

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\,\frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \ (p \in \mathbb{R} \text{ fixé})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} x^k + o(x^n), \text{ où } \binom{p}{k} := \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}, \quad \binom{p}{0} = 1\,.$$

C'est *le binôme de Newton*; nous notons séparément trois cas spéciaux :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

Le calcul d'un développement limité peut toujours se faire directement en principe, en calculant les dérivées successives de la fonction.

Dans bien des cas, par contre, il est *beaucoup* plus pratique d'utiliser des développements connus, en conjonction avec certains résultats portant sur le développement d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, d'une intégrale, ou d'une dérivée.

Pour bien comprendre cette phrase, il faut étudier un certain nombre exemples.

On est ainsi appelé à jouer le grand jeux des DL

exemple

Calcul *direct* du DL de $\arctan x$?

$$[\arctan x]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$[\arctan x]'' = \left[\frac{1}{1+x^2}\right]' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$[\arctan x]''' = \left[\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right]' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$[\arctan x]'''' = \left[\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\right]' = \cdots$$

De même, les DL de tan et arcsin ne se prêtent pas à un calcul direct.

Un autre cas où la calcul direct du DL serait problématique :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

par exemple

$$\frac{x^3+3}{(x^2+x+1)^2}$$

Pourtant, il existe des méthodes rendant le calcul de ces DL assez simple...

On commence le jeux par le cas de la somme de deux fonctions

Soit $f(x) = P_f(x) + o_f(x^3) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o_f(x^3)$ le DL en 0 d'ordre 3 de f.

De même pour g :

$$g(x) = P_g(x) + o_g(x^3) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + o_g(x^3).$$

Quel est le DL en 0 de $(f+g)$?

On a

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x \\ &\quad + (a_2+b_2)x^2 + (a_3+b_3)x^3 + o_f(x^3) + o_g(x^3) \\ &= \underbrace{P_f(x)+P_g(x)}_{\substack{P(x)\\ \text{(degré 3}\\ \text{ou moins)}}} + \underbrace{o_f(x^3)+o_g(x^3)}_{=\,o(x^3)} \end{aligned}$$

Par l'affirmation d'unicité dans le théorème Taylor-Young, il suit que $P(x)$ est justement $P_{3,0,f+g}(x)$

La conclusion suit aussi de la façon que les a_i, b_i sont calculés.

Donc "le DL de la somme est la somme des DL".

De même pour le DL de cf en fonction de celui pour f: on multiplie terme par terme

Résumé

Proposition (Linéarité du DL) Soit P la partie polynomiale du DL d'ordre n de f en a, et soit Q la partie polynomiale du DL d'ordre m de g en a, où $m \geqslant n$. Soit c et d deux réels. Alors la partie polynomiale du DL d'ordre n de $c\,f + d\,g$ en a consiste des termes de degré inférieur ou égal à n du polynôme $c\,P + d\,Q$.

Informellement:

DL de $(cf+dg) = c$(DL de f)$+\ d$(DL de g), mais avec troncation au plus bas ordre.

exemple Calculer le DL en 0 et d'ordre 5 de la fonction $2\sin x + \ln(1+x)$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

d'où

$$\begin{aligned} 2\sin x + \ln(1+x) &= (2x + x) - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{-2}{3!} + \frac{1}{3}\right)x^3 \\ &\quad - \frac{x^4}{4} + \left(\frac{2}{5!} + \frac{1}{5}\right)x^5 + o(x^5) \\ &= 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{13}{60}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Rq: pour l'ordre n, il faut au moins l'ordre n de chaque fonction

exemple Calculer le DL en 0 et d'ordre 5 de la fonction

$$x \mapsto f(x) := \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$x \Longrightarrow -x$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right\} + o(x^5) \end{aligned}$$

Rq: Euler introduit ce DL pour calculer ln 2 en posant x = 1/3 ...

DL d'un produit

Soit $f(x) = P_f(x) + o_f(x^3) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o_f(x^3)$ le DL en 0 d'ordre 3 de f, et de même pour g:

$$g(x) = P_g(x) + o_g(x^3) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + o_g(x^3).$$

Quel est le DL en 0 de fg?

$$\begin{aligned} (fg)(x) &= \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o_f(x^3)\right] \\ &\quad \times \left[b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + o_g(x^3)\right] \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (\ \ )x^2 + (\ \ )x^3 \\ &\quad \underbrace{\boxed{\begin{array}{l} + (\text{termes en } x^4, x^5, x^6) \\ + (\text{termes} = [\text{borné}] \times [o_f(x^3) \text{ ou } o_g(x^3)]) \end{array}}}_{= o(x^3)} \\ &= (\text{troncation de } P_f(x)P_g(x) \text{ à l'ordre } 3) + o(x^3) \end{aligned}$$

Proposition (DL du produit) Soit P la partie polynomiale du DL d'ordre n de f en a, et soit Q la partie polynomiale du DL d'ordre m de g en a, où $m \geqslant n$. Alors la partie polynomiale du DL d'ordre n de fg en a est la troncation à l'ordre n du polynôme PQ.

exemple Calculer le DL en 0 et d'ordre 3 de la fonction $(\sin x)\ln(1+x)$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

d'où

$$\begin{aligned}(\sin x)\ln(1+x) &= \left[\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\right]_{\text{tronqué}} + o(x^3)\\ &= (?) + (?)x + (?)x^2 + (?)x^3 + o(x^3)\\ &= 0 + 0x + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\end{aligned}$$

Rq: pour l'ordre n, il faut (en général) l'ordre n de chaque DL. Fallait-il l'ordre 3 de chaque fonction dans l'exemple ci-dessus?

DL d'une fonction composée

Pour calculer le DL en a de $f(g(x))$, il faut utiliser le DL de g en a et le DL de f en $g(a)$.

On traite le cas où $a = 0$ et $g(a) = 0$.
(Donc, c'est les deux DL en 0 qui participent.)

Proposition (DL de composée) On suppose $g(0) = 0$. Alors la partie polynomiale du DL d'ordre n de $f(g(x))$ en 0 est obtenue par substitution de la partie polynomiale du DL d'ordre n de g en 0 dans celle de f, et troncation à l'ordre n.

exemple Calculer le DL en 0 et d'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \sin[\ln(1+x)]$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

On écrit
$$\sin X = X - \frac{X^3}{6} + o(X^4)$$
et ensuite on pose
$$X = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

$$\sin(\ln(1+x)) = \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] - \frac{\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]^3}{6} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned}&= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] - \frac{x^3}{6}\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right]^3 + o(x^3)\\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + o(x^3)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).\end{aligned}$$

exemple Calculer le DL en 0 et d'ordre 6 de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$.

Comment ne PAS faire :

$$\begin{aligned}
\left(e^{x^2}\right)' &= 2xe^{x^2} \\
\left(e^{x^2}\right)'' &= \left(2xe^{x^2}\right)' = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} \\
\left(e^{x^2}\right)''' &= \left(4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2}\right)' \\
\left(e^{x^2}\right)'''' &= \\
\left(e^{x^2}\right)''''' &= \\
\left(e^{x^2}\right)'''''' &=
\end{aligned}$$

exemple Calculer le DL en 0 et d'ordre 6 de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\Longrightarrow \quad e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)$$

car

$$\left.\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + c\,x^4 + d\,x^5 + \ell\,x^6 + o(x^6) \\
x^2 &= x^2 + o(x^6)
\end{aligned}\right\} \text{les DL d'ordre 4}$$

On substitue le second polynomial dans le premier et on tronque :

$$1 + (x^2) + \frac{1}{2}\,(x^2)^2 + \frac{1}{6}\,(x^2)^3 + \cancel{c\,(x^2)^4} + \cancel{d\,(x^2)^5} + \cancel{\ell\,(x^2)^6}$$

exemple Calculer le DL en 0 et d'ordre 2 de la fonction $x \mapsto e^{\cos x}$.

Comment ne PAS faire :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad e^{\cos x} &= 1 + \left[1 - \tfrac{1}{2}x^2\right] + \frac{1}{2}\left[1 - \tfrac{1}{2}x^2\right]^2 + o(x^2) \\
&= \tfrac{5}{2} - x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

C'est archi faux ! Même la valeur en x = 0 n'est pas la bonne...

Puisque la valeur de $\cos x$ en $x = 0$ vaut 1, il faudrait le DL de e^x en $x = 1$:

$$e^x = e + e(x-1) + \tfrac{1}{2}e(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

Cela donne : $e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^2)$

Pour le DS :

intégration **sans doute**
fonctions élémentaires **évidemment**
fonctions trig réciproques **absolument**
équations différentielles **bien sûr**
intégrales impropres **oui**
fonctions hyperboliques **non**
développements limités **non**
vie de Euler **peut-être**

Fin du neuvième cours