Analyse II : Intégration et approximation

MAT1009L / séquence 4 / printemps 2016

cours de Francis Clarke

CM8 :

1. Le calcul des variations
2. Les fonctions hyperboliques
3. Résumé de l'intégration, tableau final
4. Quelques exemples
5. KH 5
6. Partiel 1 : les copies

Analyse II Calendrier 2016 (les mercredi)

Dans ce cours, il s'agit principalement de connaître les fonctions élémentaires, les intégrer, et les calculer

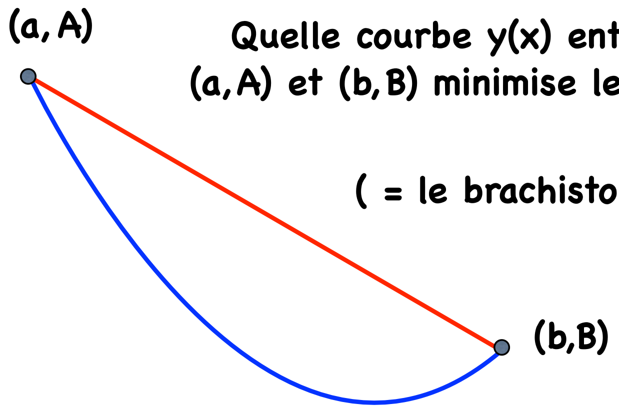
27 janvier	cours	TD	
3 février	cours	TD	
10 février	cours	TD	
17 février	cours	TD	← DS1
~~24 février~~	~~cours~~	~~TD~~	(congé de travail intensif chez soi)
2 mars	cours	TD	
9 mars	cours	TD	
~~16 mars~~	~~cours~~	~~TD~~	(CC en commun, on ne participe pas)
23 mars	cours	TD	← partiel 1
30 mars	cours	TD	← fin de l'intégration !
6 avril	cours	TD	
13 avril	cours	TD	← DS 2
~~20 avril~~	~~cours~~	~~TD~~	(congé de travail intensif chez soi)
27 avril	cours	TD	
4 mai	cours	TD	← partiel 2

CC final : entre le 30 mai et le 8 juin

Une application importante de l'intégration :

le calcul des variations

(optimisation par rapport aux courbes)



Quelle courbe y(x) entre les points (a,A) et (b,B) minimise le temps de la descente ?

(= le brachistochrone)

On cherche la courbe $y(x)$ qui minimise le temps de descente, qui est donné par

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2g(y(x)-A)}}\,dx$$

La monographie de Euler de 1744 :

Méthodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu

On y trouve :

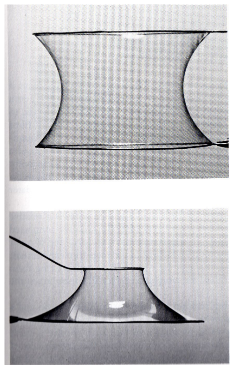
- Position générale du problème
- Equation d'Euler
- Principe de moindre action
- Méthode des multiplicateurs pour les contraintes
- 100 exemples

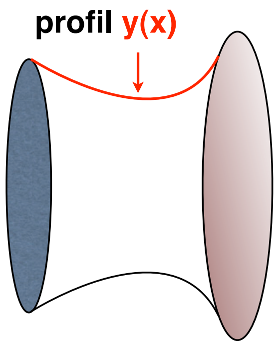
'Rien ne se passe dans le monde qui ne soit la signification d'un certain maximum ou d'un certain minimum'

Axiome :

Le comportement d'un système physique correspond à un minimum.

Un exemple d'Euler





La surface observée est d'aire minimale

(principe de d'Alembert)

Il s'agit alors de trouver la courbe $y(x)$ qui minimise l'aire de la surface de révolution, c-à-d l'intégrale

$$2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

Le profil minimal satisfait l'équation différentielle d'Euler pour ce problème, qui est la suivante:

$$\boxed{y' = \sqrt{y^2-k^2}}$$

On sépare :

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-k^2}} = dx$$

Comment intégrer à gauche ?

Le changement de variable

$$y = k\cos\theta \quad (\text{ou mieux, } \theta = \arccos(y/k))$$

n'est pas utile ici.

Car il transforme $\sqrt{y^2-k^2}$ en $k\sqrt{\cos^2\theta - 1}$

De même le changement de variable $\theta = \arcsin(y/k)$.

Le profil minimal satisfait l'équation différentielle d'Euler pour ce problème, qui est la suivante:

$$\boxed{y' = \sqrt{y^2-k^2}}$$

On sépare :

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-k^2}} = dx$$

Comment intégrer à gauche ?

Le changement de variable $\theta = \arctan(y/k)$ n'aide pas non plus.

Car il transforme $\sqrt{y^2-k^2}$ en $k\sqrt{\tan^2\theta - 1}$.

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-k^2}} = dx$$

On pose $y = k\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$

$dy = k\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}dt$

Alors $y^2 - k^2 = k^2\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 - k^2$

$$= k^2\frac{\{e^{2t}+2+e^{-2t}-4\}}{4}$$

$$= k^2\frac{\{e^{2t}-2+e^{-2t}\}}{4}$$

$$= k^2\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 \implies \int\frac{dy}{\sqrt{y^2-k^2}} = \int dt = \int dx$$

$$y = k\cosh t \qquad \implies t = x + C$$

On trouve

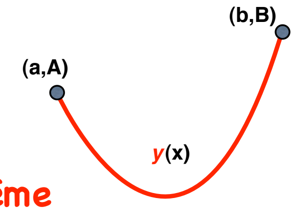
$$\boxed{y = k\cosh t = k\cosh(x+C) = k\frac{e^{x+C}+e^{-x-C}}{2}}$$

On trouve

$$\boxed{y = k\cosh t = k\cosh(x+C) = k\frac{e^{x+C}+e^{-x-C}}{2}}$$

C'est une caténaire

Euler considère aussi la forme d'une chaîne qui est attachée en deux points :



Ce problème mène à la même équation d'Euler

Ce qui explique que la caténaire porte aussi le nom chaînette

Les $\boxed{\textit{fonctions hyperboliques}}$ sont définies par

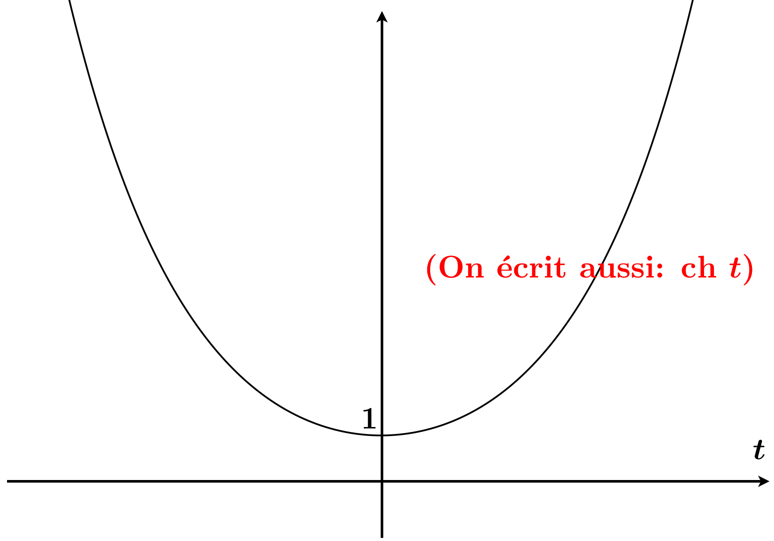
$$\sinh t := \frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

$$\cosh t := \frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

$$\tanh t := \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$$

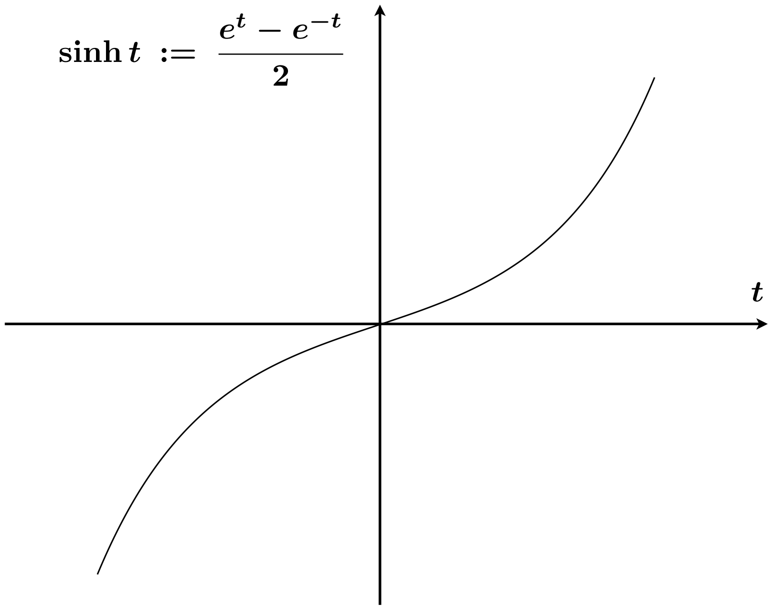
pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$\cosh t := \frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

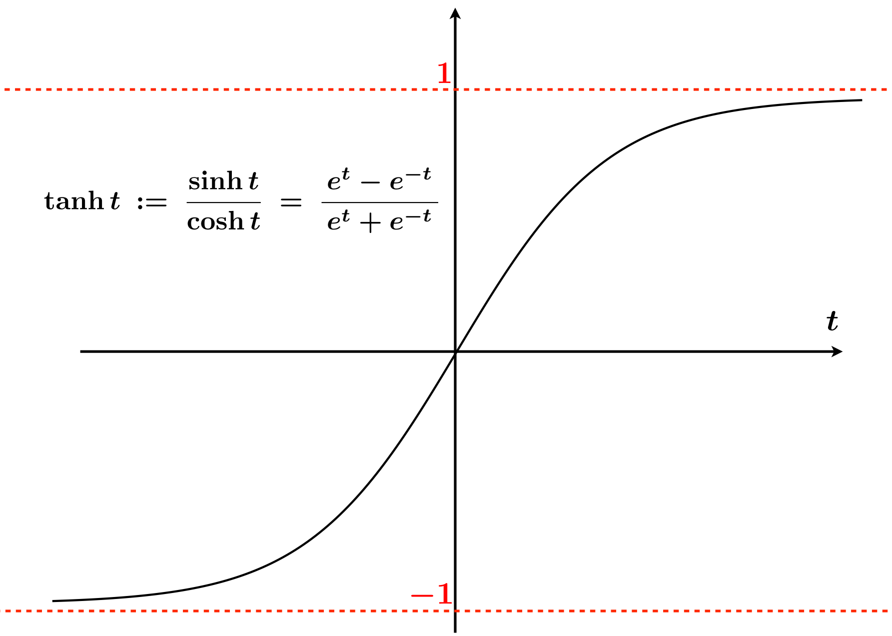


(On écrit aussi: ch t)

$$\sinh t := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$



$$\tanh t := \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$



Les fonctions hyperboliques présentent nombreuse analogies avec les fonctions trigonométriques.

L'identité suivante (analogue à la formule circulaire) est facile à prouver

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

preuve :

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left\{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y
\end{aligned}$$

La formule

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

donne en particulier

$$\begin{aligned}
\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
&= 2\cosh^2 x - 1
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

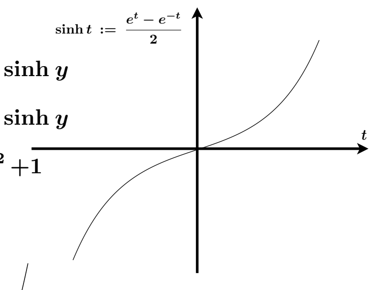
Dérivées

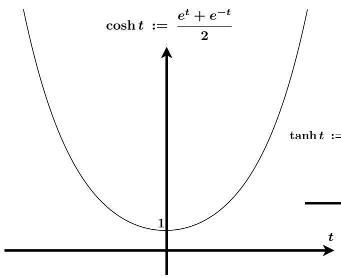
On vérifie aisément

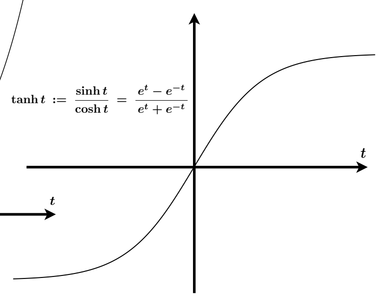
$$\begin{aligned}(\cosh x)' &= \sinh x\\ (\sinh x)' &= \cosh x\\ (\tanh x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x\,.\end{aligned}$$

Résumé : fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\\ \sinh(x+y) &= \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y\\ \cosh(x+y) &= \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y\\ \cosh(2x) &= 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 + 1\\ \sinh(2x) &= 2\sinh x\,\cosh x\end{aligned}$$



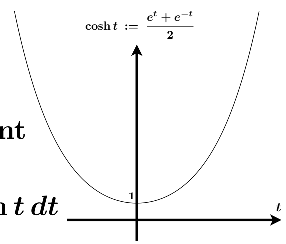




$$\begin{aligned}(\cosh x)' &= \sinh x\\ (\sinh x)' &= \cosh x\\ (\tanh x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x\,.\end{aligned}$$

Pour traiter $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ dans ce monde hyperbolique, on voudrait poser (lorsque $x > 1$)

$$x = \cosh t\,. \qquad (t > 0)$$



Alors $dx = \sinh t\,dt$ et l'intégrale devient

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx \longrightarrow \int \sqrt{\cosh^2 t - 1}\ \sinh t\,dt$$

$$= \int \sinh^2 t\,dt \quad (\text{car } \cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t \text{ et } \sinh t \geq 0).$$

On peut très bien déterminer cette intégrale, mais par la suite (afin de revenir à la variable x) il faudra trouver t à partir de $x = \cosh t$.

C-à-d, il faudra les réciproques des fonctions hyperboliques

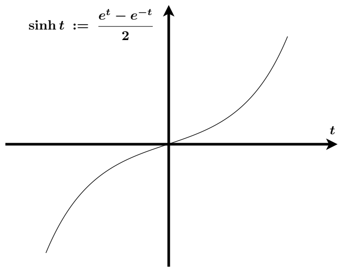
Fonctions hyperboliques réciproques

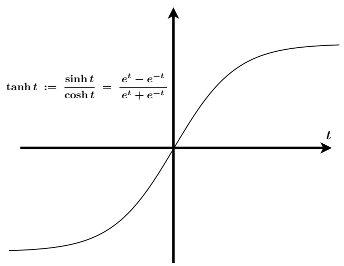
Comme pour les fonctions trigonométriques (mais avec des différences), les fonctions hyperboliques admettent des réciproques, qui sont notées argsinh, argcosh, et argtanh.

La fonction argsinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est tout simplement la fonction inverse de sinh.

La fonction argtanh, par contre, est définie seulement sur $]-1,1[$ (c'est-à-dire l'intervalle image de $\mathbb{R}$ par tanh); elle est alors caractérisée par :

argtanh x est l'unique réel u tel que $\tanh u = x$.



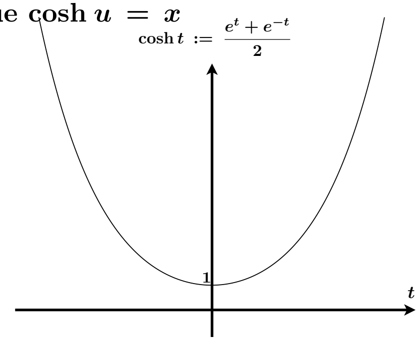


Pour argcosh, les choses sont aussi compliquées qu'en trigonométrie ordinaire, puisqu'il faut à la fois restreindre les ensembles de départ et d'arrivée de cosh pour obtenir une bijection.

On obtient que argcosh est définie sur $[1,+\infty)$ (c'est-à-dire sur l'intervalle image de $\mathbb{R}$ par cosh) et est caractérisée par :

argcosh x est l'unique u réel positif tel que $\cosh u = x$

(ne pas oublier le *positif*).



Exemple

Calculer

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

dans le domaine $x > 1$.

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sqrt{\cosh^2 u - 1}\,\sinh u\,du$$

$x = \cosh u$, ou (préférable) $u = \operatorname{argcosh} x$

$dx = \sinh u\,du$

$$\begin{aligned}
&= \int \sqrt{\sinh^2 u}\,\sinh u\,du \\
&= \int \sinh^2 u\,du \quad (\text{car } u \text{ et } \sinh u \geq 0) \\
&= \tfrac{1}{2}\int [\cosh(2u) - 1]\,du \\
&= \tfrac{1}{4}\sinh(2u) - \tfrac{1}{2}u + C \\
&= \tfrac{1}{2}(\sinh u)(\cosh u) - \tfrac{1}{2}u + C \\
&= \tfrac{1}{2}\left[\cosh^2 u - 1\right]^{1/2}\cosh u - \tfrac{1}{2}u + C \\
&= \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1} - \tfrac{1}{2}\operatorname{argcosh} x + C
\end{aligned}$$

Calculer

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

dans le domaine $x > 1$.

Remarque : Pour traiter $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ plutôt que $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$, aucun aspect hyperbolique intervient.

Le changement de variable $\theta = \arcsin x$ donne le résultat :

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \longrightarrow \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\ \cos\theta\,d\theta$$
$$= \int \cos^2\theta\,d\theta \;=\; \frac{1}{2}\int (\cos(2\theta)+1)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{1}{2}\theta + C$$
$$= \frac{1}{2}\{\sin\theta\cos\theta + \theta\} + C$$
$$= \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right\} + C.$$

Exemple (le même)

Calculer

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx$$

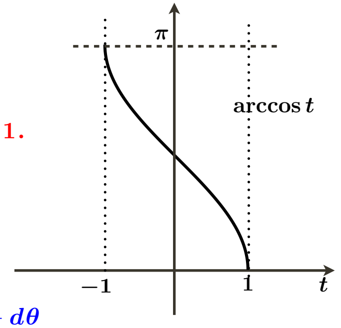
dans le domaine $x > 1$.

mais sans utiliser les fonctions hyperboliques

Calculer

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx$$

dans le domaine $x > 1$.



$$x = \frac{1}{\cos\theta}$$

ou mieux,

$\theta = \arccos(1/x) \in \ ]0, \pi/2[$

donne $\qquad dx = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sqrt{\cos^{-2}\theta - 1}\,\cos^{-2}\theta\sin\theta\,d\theta$$
$$= \int \sqrt{\tan^2\theta}\ \cos^{-2}\theta\sin\theta\,d\theta \ (\text{car } 1+\tan^2 = 1/\cos^2)$$
$$= \int \tan\theta\ \cos^{-2}\theta\sin\theta\,d\theta \ \ (\text{car } \tan\theta > 0\ )$$
$$= \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta$$

Pour calculer $\displaystyle\int \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta$ on peut écrire

$$\int \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta = \int \frac{d\theta}{\cos^3\theta} - \int \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$

et calculer séparément les deux intégrales...

$$\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \tfrac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + C$$

$$\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) + C$$

Suite au retour à la variable x on obtient la réponse

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \tfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C$$

En passant par les fonctions hyperboliques on avait trouvé

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \tfrac{1}{2}\operatorname{argcosh} x + C$$

?

Proposition. On a, pour $x > 1$:

$$\operatorname{argcosh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Démonstration. Mettons $\theta := \operatorname{argcosh} x > 0$.
Alors θ satisfait l'équation

$$e^{\theta} + e^{-\theta} = 2x \implies e^{2\theta} + 1 = 2xe^{\theta}.$$

Posons $X := e^{\theta} > 1$. Alors

$$X^2 - 2xX + 1 = 0 \implies X = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2}$$

$$\implies X = x + \sqrt{x^2-1} \quad (\text{car } X > 1)$$

On en déduit

$$\operatorname{argcosh} x = \theta = \ln X = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right). \quad \blacksquare$$

Proposition.

$$\begin{aligned}
\operatorname{argcosh} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) & (x>1)\\
\operatorname{argsinh} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) & (x\in\mathbb{R})\\
\operatorname{argtanh} x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & (|x|<1)\\
\left[\operatorname{argcosh} x\right]' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & (x>1)\\
\left[\operatorname{argsinh} x\right]' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & (x\in\mathbb{R})\\
\left[\operatorname{argtanh} x\right]' &= \frac{1}{1-x^2} & (|x|<1)
\end{aligned}$$

Pour le calcul des primitives, les fonctions hyperboliques et leurs réciproques sont le plus souvent utiles lorsque le terme

$$\sqrt{x^2 \pm a^2}$$

ou

$$\sqrt{a^2 \pm x^2}$$

est présent.

(mais elles ne sont pas strictement essentielles)

On n'en parlera très peu...

fonction	primitive	fonction	primitive
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x	$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (\lvert x\rvert > 1)$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{argsinh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$	$\operatorname{argcosh} x$

tableau définitif

fonction	primitive	fonction	primitive
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x	$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\dfrac{1}{x^2+a^2} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a > 0)$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (a > 0)$	$\operatorname{argsinh}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (x > a > 0)$	$\operatorname{argcosh}\left(\dfrac{x}{a}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (a \neq 0)$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (x > a > 0)$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

Le club très fermé des fonctions dites élémentaires

les polynômes $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots a_{n-1}x + a_n$

+ les fonctions engendrées

$\ln x \quad = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ $\qquad \log_b x = \ln x / \ln b$

e^x = la réciproque exp de ln $\qquad \alpha^x = \exp(x \ln \alpha)$

$\sin x$ compliquée...

$\cos x \quad = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$\tan x \quad = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sinh x \quad = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x \quad = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\tanh x \quad = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Rq: les deux fonctions ln et sin servent à tout engendrer

+ certaines réciproques

Exemple La fonction

$$x \mapsto \frac{\ln(7 + \cos(x^2 + 3x + 1))}{1 + x^4}$$

est obtenue en utilisant la composition de fonctions élémentaires, ainsi que les opérations arithmétiques.

Le club est-il fermé sous l'intégration ? non

Exemple La fonction

$$x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

ne peut *pas* être exprimée par les fonctions élémentaires (c-à-d, en utilisant la composition et les opérations arithmétiques)

Les fonctions de base sont caractérisées par une équation différentielle :

$\ln x$	$y'(x) = 1/x, y(1) = 0$
e^x	$y' = y, y(0) = 1$
$\sin x$	$y''+y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
$\cos x$	$y''+y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$
$\tan x$	$y' = 1+y^2, y(0) = 0$
$\sinh x$	$y''-y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
$\cosh x$	$y''-y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

Techniques d'intégration: résumé

- Directement d'après la définition
- On reconnaît une primitive d'après le tableau
- On fait une réécriture qui simplifie
- On reconnaît la forme $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ où une primitive pour f est connue
- Intégration par parties
- Réduction d'ordre
- Décomposition des fractions rationnelles
- Changement de variable $t = \varphi(x)$
- Fraction rationnelle $f(\sin x, \cos x)$

Exemple

Trouver $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta}$

On écrit

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\theta}{\cos\theta} &= \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos^2\theta} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{1-\sin^2\theta} \\
&= \int \frac{du}{1-u^2} \text{ (ayant mis } u = \sin\theta) \\
&= \int \frac{-du}{(u-1)(u+1)} \\
&= \int \frac{(-1/2)\, du}{u-1} + \int \frac{(1/2)\, du}{u+1} \\
&= -\tfrac{1}{2}\ln|u-1| + \tfrac{1}{2}\ln|u+1| + C \\
&= -\tfrac{1}{2}\ln|\sin\theta - 1| + \tfrac{1}{2}\ln|\sin\theta + 1| + C \\
&= -\tfrac{1}{2}\ln(1-\sin\theta) + \tfrac{1}{2}\ln(1+\sin\theta) + C \\
&= \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) + C
\end{aligned}$$

Exemple

Déterminer $\displaystyle\int \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\cos^4\theta}$

On trouve

$$\begin{aligned}
I := \int \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\cos^4\theta} \\
&= \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \times \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \int \tan^2\theta \times \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \int \tan^2\theta \times (\tan\theta)'\, d\theta \\
&= \tfrac{1}{3}\tan^3\theta + C
\end{aligned}$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta} &= \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos^4\theta} \\
&= \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{(1-\sin^2\theta)^2} \\
&= \int \frac{du}{(1-u^2)^2}
\end{aligned}
$$

(où on a posé $u = \sin\theta$)

$$
= \int \frac{du}{(u-1)^2(u+1)^2}
$$

$$
\frac{1}{(u-1)^2(u+1)^2} =
$$

$$
\frac{-\frac{1}{4}}{u-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(u-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{u+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(u+1)^2}
$$

On a par conséquent

$$
\int \frac{du}{(u-1)^2(u+1)^2} =
$$

$$
\frac{1}{4}\Big\{ -\ln|u-1| - (u-1)^{-1} + \ln|u+1| - (u+1)^{-1} \Big\} + C
$$

$$
= \frac{1}{4}\Big\{ \ln\frac{1+u}{1-u} + \frac{2u}{1-u^2} \Big\} + C
$$

(On note que $u = \sin\theta$ sera dans $]-1,1[$.)

D'où la réponse

$$
\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \tfrac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + C
$$

exemple

Calculer

$$
\int \arcsin x\, dx
$$

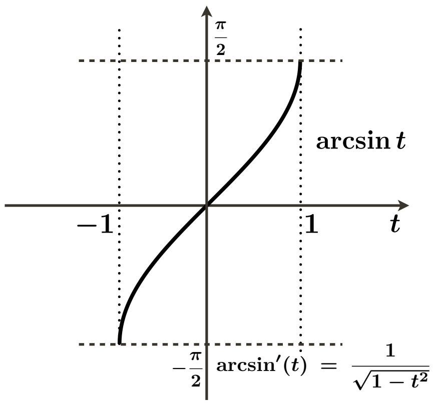
$$
\begin{aligned}
\int \arcsin x\, dx &= \int (x)'(\arcsin x)\, dx \\
&= x\arcsin x - \int (x)(\arcsin x)'\, dx \\
&= x\arcsin x - \int (x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx \\
&= x\arcsin x - \int \left(\frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\
&= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}
$$

Les deux prochains exemples exigent deux ou trois étapes

Exemple Déterminer $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(4-x^2)^{5/2}}$

Afin d'avoir $x = 2\sin\theta$, on pose $\theta := \arcsin(x/2)$.

D'où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $dx = 2\cos\theta\,d\theta$.



Déterminer $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(4-x^2)^{5/2}}$ Afin d'avoir $x = 2\sin\theta$, on pose $\theta := \arcsin(x/2)$.

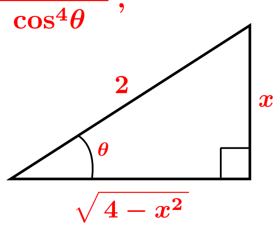
On trouve ensuite

$$
\begin{aligned}
I := \int \frac{x^2\,dx}{(4-x^2)^{5/2}} &= \int \frac{4\sin^2\theta \times 2\cos\theta\,d\theta}{\left(4-4\sin^2\theta\right)^{5/2}} \\
&= \int \frac{8\sin^2\theta \times \cos\theta\,d\theta}{4^{5/2}\left(1-\sin^2\theta\right)^{5/2}} \\
&= \int \frac{8\sin^2\theta \times \cos\theta\,d\theta}{32\,(\cos^2\theta)^{5/2}} \\
&= \int \frac{8\sin^2\theta \times \cos\theta\,d\theta}{32\,(\cos^5\theta)} \qquad (\text{car } \cos\theta > 0) \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\cos^4\theta}
\end{aligned}
$$

A ce stade on a :

$$I = \int \frac{x^2\,dx}{(4-x^2)^{5/2}} = \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\cos^4\theta},$$

où $\theta = \arcsin(x/2)$.



L'exemple précédent montre que

$$\int \frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\cos^4\theta} = \frac{1}{3}\tan^3\theta + C$$

$$\Longrightarrow \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

D'où

$$I = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{(4-x^2)^{3/2}} + C = \frac{1}{12}\,\frac{x^3}{(4-x^2)^{3/2}} + C$$

Exemple

Trouver

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Le changement de variable

$$x = \tan\theta \iff \theta = \arctan x$$

se suggère, à cause de l'identité

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\,.$$

On a $dx = (\tan\theta)' d\theta = d\theta/\cos^2\theta$, et l'intégrale devient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \to \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta \times \frac{1}{\cos\theta}} = \int \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

(on sait que $\cos\theta > 0$ puisque $\theta = \arctan x \in \,]-\pi/2, \pi/2[$)

Il s'agit maintenant de calculer $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta}$

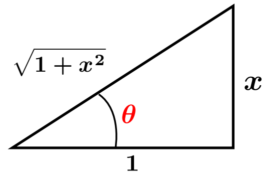
Rappel

$$\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) + C$$

On a par conséquent

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{d\theta}{\cos\theta}\\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) + C\\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(\arctan x)}{1-\sin(\arctan x)}\right) + C\\ &= ?\\ &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C\end{aligned}$$

(suite au remplacement de $\sin(\arctan x)$ par $x/\sqrt{1+x^2}$)

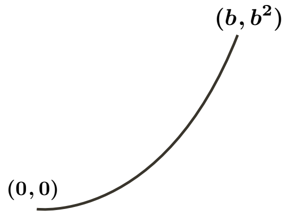


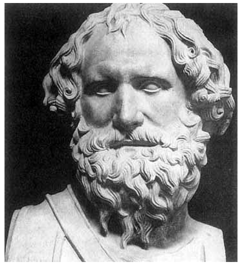
une application géométrique en détail

Exemple : calculer la longueur de la courbe

$$y = x^2$$

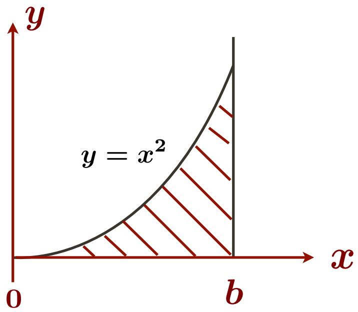
entre les points (0,0) et (b,b²).





Archimède (3 siècles av. J-C)

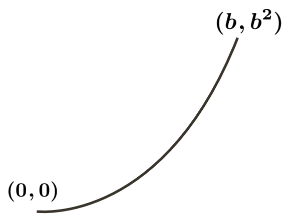
Rappel : calculer l'aire sous la parabole $b^3/3$



Exemple : calculer la longueur de la courbe

$$y = x^2$$

entre les points (0,0) et (b,b²).



Théorème Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$, et soit C la courbe représentative de f sur $[a, b]$. Alors

$$\text{Longueur}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

Il s'agit donc de calculer $\int_0^b \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$

L'identité

$$1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$$

$$1 + 4x^2 = 1 + 4\left(\tfrac{1}{2}\tan\theta\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

motive le changement de variable

$$\theta = \arctan(2x) \implies x = \tfrac{1}{2}\tan\theta$$

$$dx = \tfrac{1}{2}\, d\theta/\cos^2\theta$$

Puisque $(\tan\theta)' = 1/\cos^2\theta$, on obtient

$$\int \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \implies \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

(On a pris $\cos\theta > 0$ parce que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \implies \cos\theta > 0$)

On avait calculé

$$\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + C$$

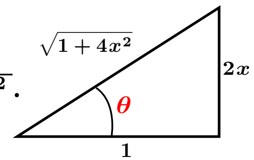
On a donc

$$\int \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

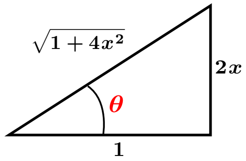
$$= \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}\right) + \frac{1}{4}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + C$$

où $\sin\theta = \sin(\arctan(2x)) = 2x/\sqrt{1 + 4x^2}$.

Et $\cos\theta = \cos(\arctan(2x)) = 1/\sqrt{1 + 4x^2}$.



On a donc



$$\int_0^b \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{8}\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) + \tfrac{1}{4}\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right]_0^{\bar\theta}$$

où $\sin\bar\theta \;=\; \sin(\arctan(2b)) \;=\; 2b/\sqrt{1+4b^2}$

et $\cos\bar\theta \;=\; \cos(\arctan(2b)) \;=\; 1/\sqrt{1+4b^2}$.

$$\boxed{= \tfrac{1}{4}\ln\left(2b+\sqrt{1+4b^2}\right) + \tfrac{1}{2}b\sqrt{1+4b^2}}$$

= la longueur de la courbe

entre les points (0,0) et (b,b²).

KH 5

Khôlle 5 (20 minutes)

1. Trouver $I := \displaystyle\int \frac{\cos^3\theta}{1-\sin\theta}\,d\theta$

2. Calculer $\quad J := \displaystyle\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$

1. Trouver $I := \displaystyle\int \frac{\cos^3\theta}{1-\sin\theta}\,d\theta$

2. Calculer $\quad J := \displaystyle\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$

KH 5
corrigé

1.

$$I = \int \frac{\cos^3\theta}{1-\sin\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta\,(1-\sin^2\theta)}{1-\sin\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)\,(1+\sin\theta)}{1-\sin\theta}\,d\theta$$

$$= \int \cos\theta\,(1+\sin\theta)\,d\theta = \int \cos\theta\,d\theta + \int \cos\theta\sin\theta\,d\theta = \sin\theta + \tfrac{1}{2}\sin^2\theta + C$$

2. On pose $\theta = \arcsin(x/2)$, d'où $x = 2\sin\theta$, $dx = 2\cos\theta\,d\theta$, et

$$J = \int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{4^{3/2}(1-\sin^2\theta)^{3/2}} = \frac{2}{8}\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{(\cos^2\theta)^{3/2}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\cos^3\theta} \quad (\text{car } \cos\theta > 0)$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{4}\tan\theta + C$$

$$= \frac{1}{4}\tan(\arcsin(x/2)) + C$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C.$$