

Analyse II : Intégration et approximation

MAT1009L / séquence 4 / printemps 2016

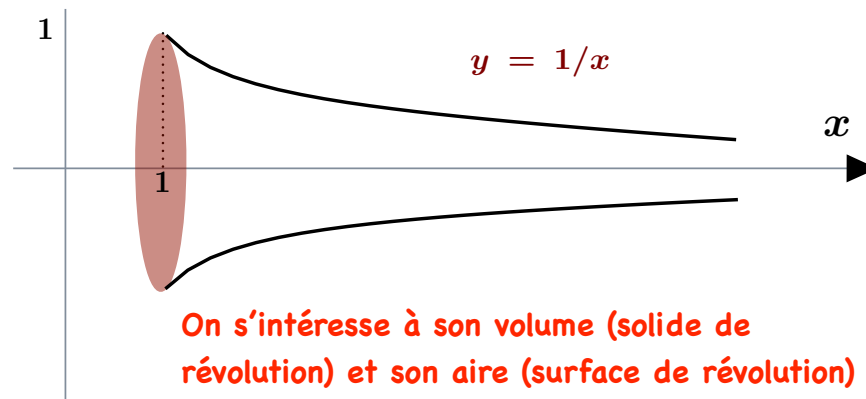
cours de Francis Clarke

CM6 :

1. Intégrales impropres (suite et fin)
2. Les fonctions arcsin et arccos
3. Changements de variable adaptés
4. Euler
5. KH4 + préparation partiel

1

On construit un verre à champagne (une flute) infini par la rotation du graphe de la fonction $f(x) = 1/x$ ($x \geq 1$) autour de l'axe des x .



3

ni cours ni TD la semaine prochaine

Partiel 1 : 23 mars

ici

venez nombreux

2

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\ \text{Volume} &= \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Pour l'aire de la trompette ($f = 1/x$) on trouve:

des intégrales
impropres
de type 1

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + (-1/x^2)^2} dx \\ &= 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{1 + x^4}}{x^3} dx \end{aligned}$$

Pour son volume:

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

4

le volume

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \pi \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \quad (\text{si cette limite existe}) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\pi \frac{1}{x} \Big|_1^b = \pi - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\pi}{b} = \pi. \end{aligned}$$

Rq : Dans l'exemple ci-dessus, l'aire vaut + infini et le volume est fini.

Il est naturel de demander si le contraire peut arriver.

Exer : Montrer que **non** ; c-à-d, si l'aire est finie, alors le volume l'est aussi.

5

7

l'aire A

$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3} dx \quad (\text{on n'a pas de primitive}) \\ &\geq 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} dx \quad (\text{si cette intégrale a un sens}) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} 2\pi \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\pi \ln b = +\infty \end{aligned}$$

Intégrales impropres de type 2

On voit par **comparaison** que l'aire vaut $+\infty$

6

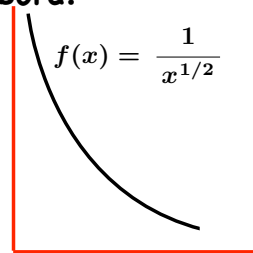
8

On a étudié ci-dessus des intégrales où l'intervalle sous-jacent est non borné. La fonction f était, elle, très correcte (continue).

Il existe une autre sorte d'intégrale impropre, où l'intervalle est borné mais la fonction (tout en étant continue dans l'intérieur de l'intervalle ouvert) est non bornée en un des deux points du bord.

Exemple: $\int_0^1 x^{-1/2} dx$

Peut-on associer une valeur à cette intégrale? On va voir que oui...



9

Pour fixer les idées, traitons le cas où f est continue sur l'intervalle $[a + \epsilon, b]$ pour tout $\epsilon > 0$, mais non bornée sur $[a, b]$ (donc la difficulté est au point a). Par exemple, f pourrait admettre une asymptote verticale en a .

L'intégrale

$$\int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

étant bien définie pour tout $\epsilon > 0$, on peut considérer la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Quand cette limite existe (dans $\mathbb{R}$), on dit que l'intégrale *impropre*

$$\int_a^b f(x) dx$$

existe, ou **converge** ; sa valeur est par définition celle de la limite.

Quand la limite vaut $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que l'intégrale **diverge** vers cette limite.

10

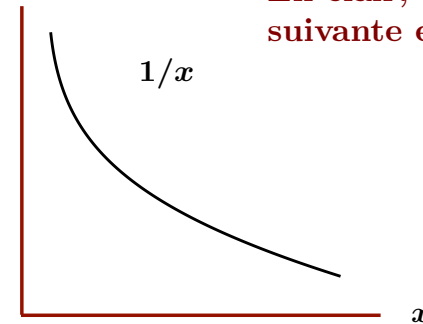
Exemple: Est-ce que l'intégrale impropre

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

converge?

En clair, on demande si la limite suivante existe ou pas:

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx$$



11

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

La difficulté (l'impropreté?) a lieu en 0

Pour $\epsilon > 0$ on calcule

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx &= \ln x \Big|_{\epsilon}^1 \\ &= \ln 1 - \ln \epsilon = -\ln \epsilon. \end{aligned}$$

On en déduit que l'intégrale impropre

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

diverge vers $+\infty$.

12

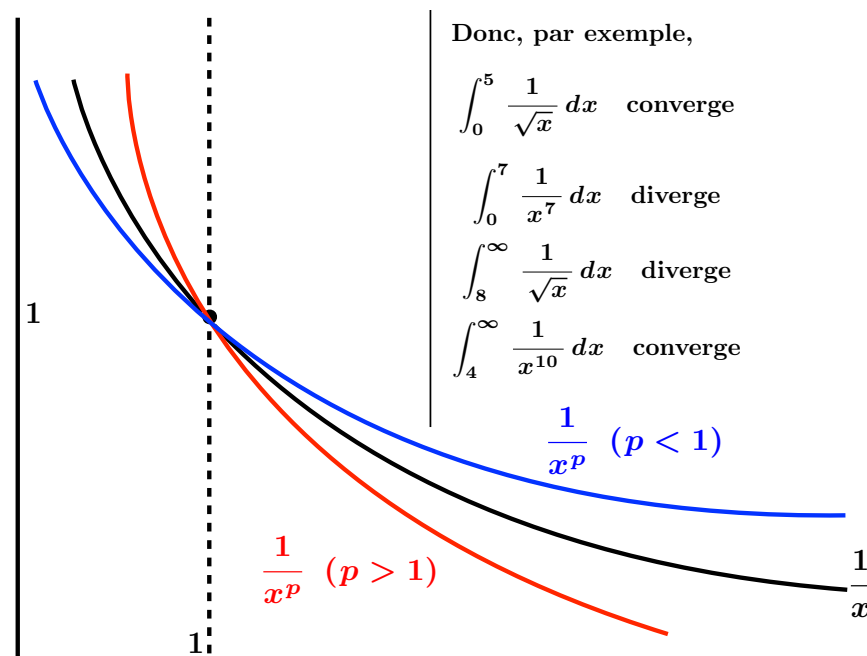
De façon plus générale, on prouve que l'intégrale impropre

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

diverge vers $+\infty$ quand $p \geq 1$,
et converge vers $1/(1-p)$
lorsque $0 < p < 1$.

(L'intégrale n'est pas impropre
lorsque $p \leq 0$.)

13



15

L'intégrale impropre

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

diverge vers $+\infty$ quand $p \geq 1$,
et converge vers $1/(1-p)$
lorsque $0 < p < 1$.

Exemple: $\int_0^1 x^{-1/2} dx$

$$= 2x^{1/2} \Big|_0^1 = 2$$

Vrai ?

Oui, car

$$\int_\epsilon^1 x^{-1/2} dx$$

$$= 2x^{1/2} \Big|_\epsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\epsilon}$$

$\rightarrow 2$.

La comparaison nous aide à nous
rappeler de ces convergences...

14

Retour à un exemple choquant Calculer $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t^4}$

On avait, avec une désinvolture flagrante, calculé:

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{t^4} = \frac{-1}{3t^3} \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{-1}{3(1)^3} - \frac{-1}{3(-1)^3}$$

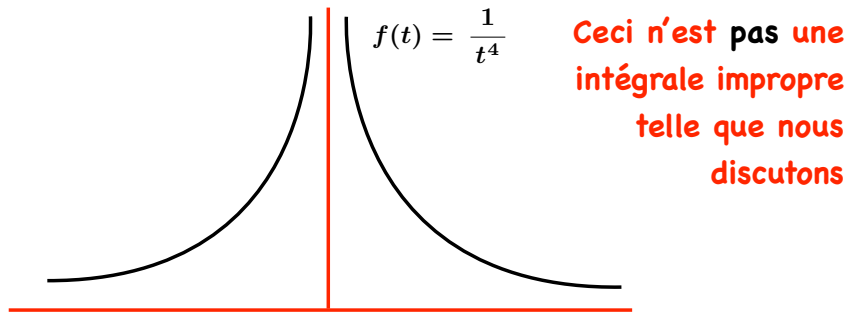
$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

Pourtant, la fonction $1/t^4$ est positive!

Comment son intégrale peut-elle être négative?

16

En réalité, le calcul ci-dessus est absurde parce que la fonction n'est pas continue sur l'intervalle en question (en fait, elle explose...) $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t^4}$



Par contre, la présence des intégrales impropres donne encore une raison de **justifier** l'existence et le calcul des intégrales que nous rencontrons...

17

Exemple

1. (a) Pourquoi l'intégrale $I := \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ est-elle impropre ?
- (b) Étudier I .

1. (a) Parce que la fonction $f(x) := \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}}$ admet une asymptote verticale en $x = 0$ (c-à-d, $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = +\infty$).

(b) On trouve $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\sqrt{e^x - 1} + C$, d'où, pour $\epsilon > 0$ petit, on a (par le théorème fondamental)

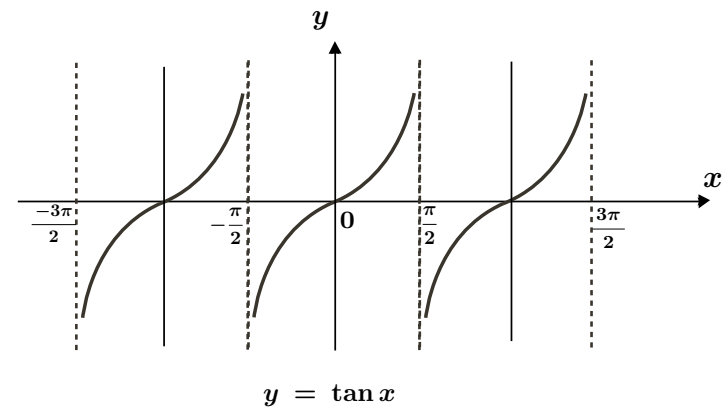
$$I_\epsilon := \int_\epsilon^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\sqrt{e^x - 1} \Big|_\epsilon^1 = 2\sqrt{e - 1} - 2\sqrt{e^\epsilon - 1}.$$

Puisque $\lim_{\epsilon \downarrow 0} I_\epsilon = 2\sqrt{e - 1}$, on en déduit que l'intégrale impropre I converge, sa valeur étant $2\sqrt{e - 1}$.

18

Exemple

Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{\pi/2} \tan \theta d\theta$



19

20

Exemple

Etudier la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{\pi/2} \tan \theta d\theta$

fonction	primitive
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$e^{ax} \ (a \neq 0)$	$\frac{e^{ax}}{a}$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \cos x $

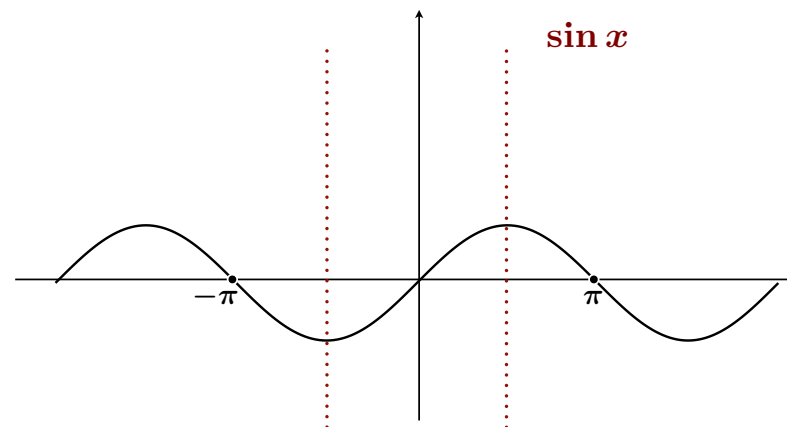
L'aspect impropre provient du point $\theta = \pi/2$, où $\tan$ n'est pas définie, puisque $\cos(\pi/2) = 0$. Pour $0 \leq \theta < \pi/2$, on a $\cos \theta > 0$.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \tan \theta d\theta &= -\ln(\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \\ &= -\ln(\cos(\frac{\pi}{2}-\epsilon)) + \ln(\cos 0) \\ &= -\ln(\cos(\frac{\pi}{2}-\epsilon)) + \ln 1 \\ &= -\ln(\cos(\frac{\pi}{2}-\epsilon)) \end{aligned}$$

Lorsque $\epsilon \downarrow 0$, le terme $\cos(\frac{\pi}{2}-\epsilon)$ tend vers 0 (par la continuité de la fonction $\cos$). On voit alors que l'intégrale tend vers (ou diverge vers) $+\infty$.

21



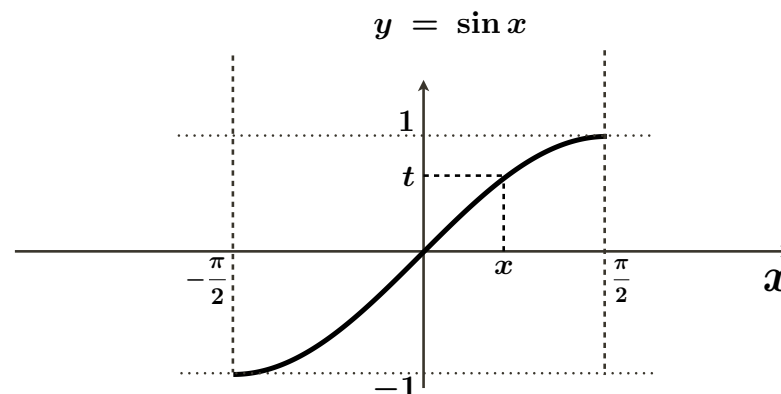
Sur $[-\pi/2, \pi/2]$, la fonction est croissante.

On choisit cet intervalle, en ce qui concerne les valeurs de la réciproque. Contrairement au cas $\arctan$, il faudra aussi contraindre le domaine de la réciproque à l'intervalle $[-1, 1]$.

23

Les autres fonctions
trigonométriques **réciproques** :

arcsin, arccos



Pour chaque $t \in [-1, 1]$ il existe un seul

$x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $t = \sin x$.

Définition : $\arcsin t$ = cette valeur de x

22

24

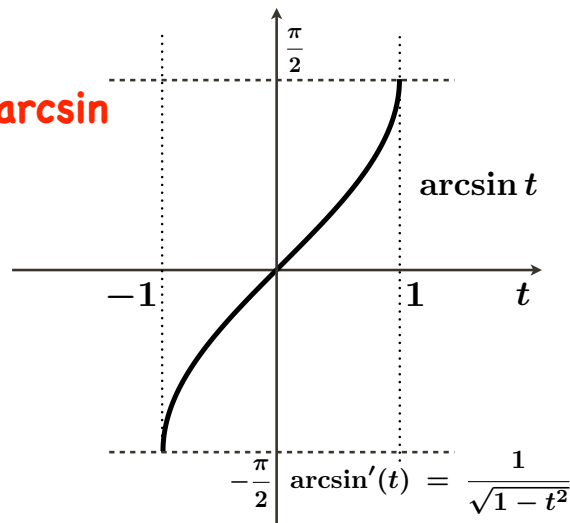
Par le théorème général, on sait que $\arcsin$ est dérivable sur $] -1, 1[$

On a $\arcsin(\sin x) = x$ pour $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

$$\Rightarrow \arcsin'(\underbrace{\sin x}_t) \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \arcsin'(t) = \frac{1}{\cos x}$$

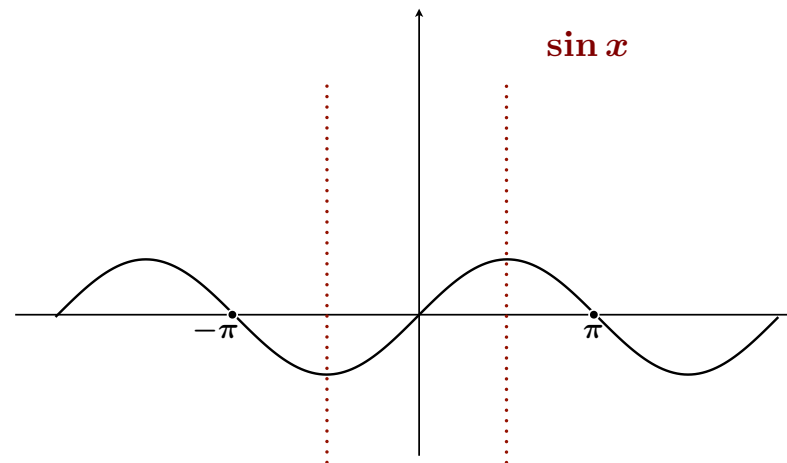
Résumé:
la fonction $\arcsin$



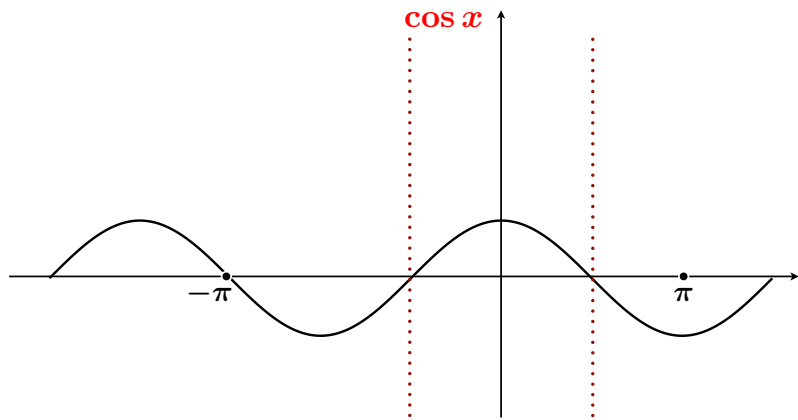
Remarque: la dérivée devient infini au bord du domaine

De façon similaire, on définit $\arccos$.

Mais contrairement au cas de sinus, l'intervalle sous-jacent $[-\pi/2, \pi/2]$ ne convient pas.



Sur $[-\pi/2, \pi/2]$, la fonction est croissante.
On limite la définition de la réciproque à cet intervalle.

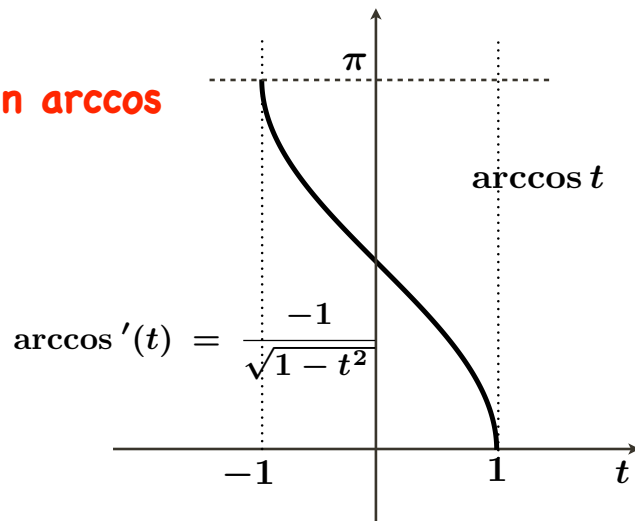


Sur $[0, \pi]$, la fonction est décroissante.

On choisit cet intervalle pour les valeurs de la réciproque.

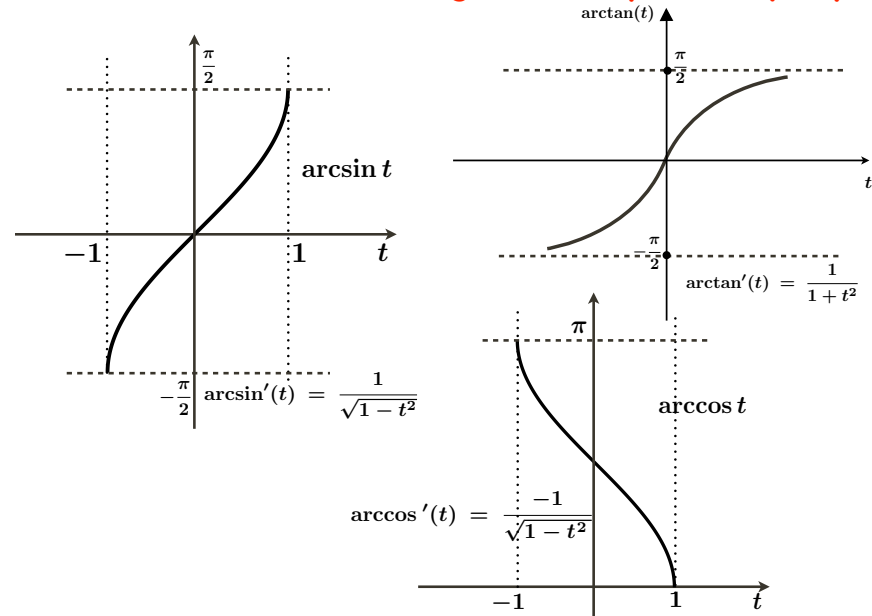
A nouveau, comme pour arcsin, le domaine de la réciproque sera $[-1, 1]$.

Résumé: la fonction arccos



Remarque: la dérivée devient infini au bord du domaine

Résumé: les fonctions trigonométriques réciproques



Application aux primitives $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$$

$$\int \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C$$

$$= \arccos t + C$$

$$\Rightarrow \arccos t + \arcsin t = K$$

$$\Rightarrow \arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

Il n'y a aucune autre formule raisonnablement simple liant les fonctions trigonométriques réciproques (si on en applique une, on se trompe). Il est faux, par exemple, que $\arctan = \arcsin / \arccos$.

De façon plus générale

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0)$$

tableau minimal de primitives à connaître

fonction	primitive	fonction	primitive
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$1/x$	$\ln x $
e^x	e^x	$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$-\ln \cos x $
$\frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a \neq 0)$	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

33

Exemple

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x}$$

35

Un changement de variable trouvé par Monsieur Euler

Il permet d'intégrer (en principe) toute
fonction de la forme

$$f(\sin x, \cos x)$$

où f est une fraction rationnelle
en deux variables

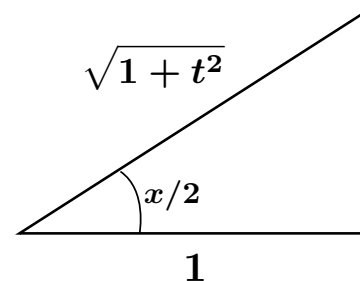
Par exemple

$$f(u, v) = \frac{u^2 + 6uv^2 + 1}{u^3 + u^2v^4 + v + 2}$$

34

$$x = 2 \arctan t \implies t = \tan(x/2), \text{ et } |x| < \pi$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$



$$\implies \cos(x/2) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\implies \frac{1 + \cos(x)}{2} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\implies \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

36

$$\begin{aligned}
x = 2 \arctan t &\implies t = \tan(x/2) & dx &= \frac{2}{1+t^2} dt \\
\int \frac{dx}{3+5 \sin x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{3+5 \frac{2t}{1+t^2}} & \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\
& & \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
&= \int \frac{2dt}{3t^2+10t+3} & 3t^2+10t+3 &= (3t+1)(t+3) \\
&= \int \frac{3/4}{3t+1} dt - \int \frac{1/4}{t+3} dt \\
&= \frac{1}{4} \ln |3t+1| - \frac{1}{4} \ln |t+3| \\
&= \frac{1}{4} \ln \left| 3 \tan \left(\frac{x}{2} \right) + 1 \right| - \frac{1}{4} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) + 3 \right| \quad \times \text{C}
\end{aligned}$$

37

On n'utiliserait PAS le changement de variable de Euler pour $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$

Avec le changement de variable, on obtiendrait

$$\int \frac{8t^2(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3} dt \quad (\text{fraction rationnelle impropre})$$

Il vaut mieux faire une réécriture:

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x \sin^2 x dx &= \int \cos x (1 - \sin^2 x) \sin^2 x dx \\
&= \int \cos x (\sin^2 x - \sin^4 x) dx \\
&= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C
\end{aligned}$$

39

Remarque.

On peut simplifier le terme $\tan(x/2)$:

$$\begin{aligned}
\tan(x/2) &= \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\cos^2(x/2)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\frac{1+\cos x}{2}} \\
&= \frac{\sin x}{1+\cos x}
\end{aligned}$$

38

Une autre classe de fonctions dont l'intégration se fait (en principe) par les fractions rationnelles:

$$f\left(t, \sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)$$

(f étant toujours une fraction rationnelle en deux variables)

40

$$f\left(t, \sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)$$

(f étant toujours une fraction rationnelle en deux variables)

On pose

$$x = \sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}$$

et l'on tourne la manivelle... à la fin, il résulte une fraction rationnelle en x !

41

$$\frac{2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} - \frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{(x+1)^2}$$

$$\text{D'où } \int \frac{2x^2}{(x^2-1)^2} dx =$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} \right\} + C$$

Et

$$\int \sqrt{\frac{t}{t+1}} dt =$$

cette fonction, en remplaçant x par $\sqrt{\frac{t}{t+1}}$

43

Exemple

$$\int \sqrt{\frac{t}{t+1}} dt \quad x = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$$

$$x^2 = \frac{t}{t+1}, \quad t = -1 + 1/(1-x^2)$$

$$dt = \frac{2x}{(x^2-1)^2} dx \implies \int \frac{2x^2}{(x^2-1)^2} dx$$

$$\frac{2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} - \frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{(x+1)^2}$$

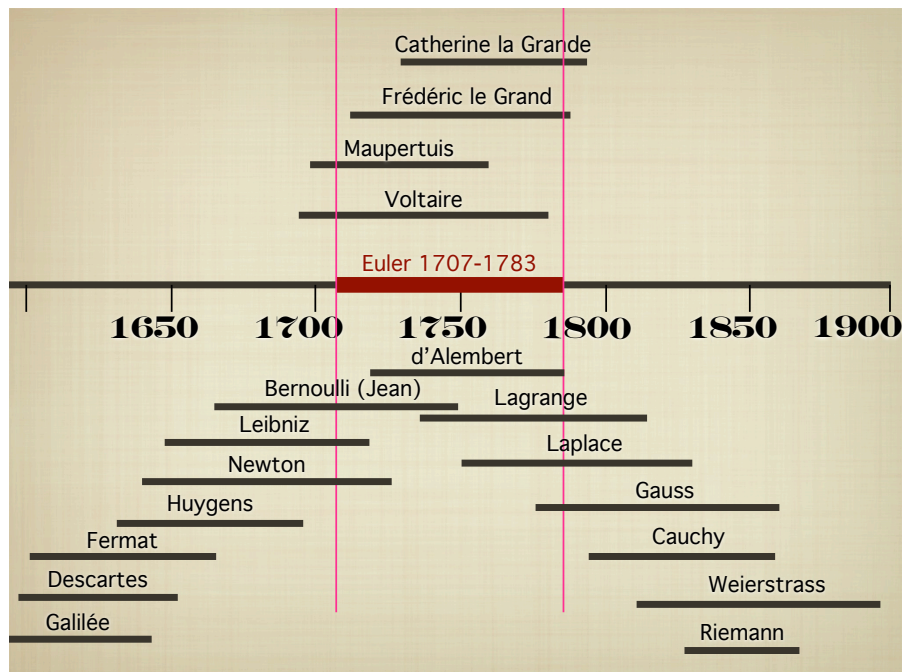
42



Leonhard Euler

1707-1783

44



45

mathématiques pures :
théorie des nombres, algèbre, séries,
calcul différentiel et intégral, géométrie,
topologie, variables complexes,
probabilités, combinatoire...

mathématiques appliquées :
science navale, mécanique, optique,
hydrodynamique, élasticité, champs
électrique, analyse numérique,
acoustique, musique, astronomie...

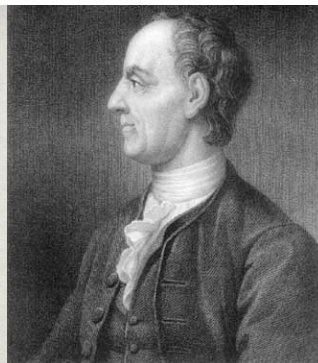
- 800 publications (+ correspondance)
- Omnia Opéra : 80 volumes
- entre 1725 et 1800, Euler = $\frac{1}{3}$ (maths + phys math + ingénierie méca)
- aveugle dès 1771
- une publication par semaine en 1775



47

Né à Bâle (Suisse) en 1707

- **prodige**
- **mémoire eidétique**
- **calcul mental**
- **université à 14 ans**
- **Johann Bernoulli**
- **théologie** → **maths**



• Académie de Saint-Petersbourg (19 à 34)

Catherine I

• Académie de Berlin (34 à 59)

Frédéric le Grand, Maupertuis, Voltaire

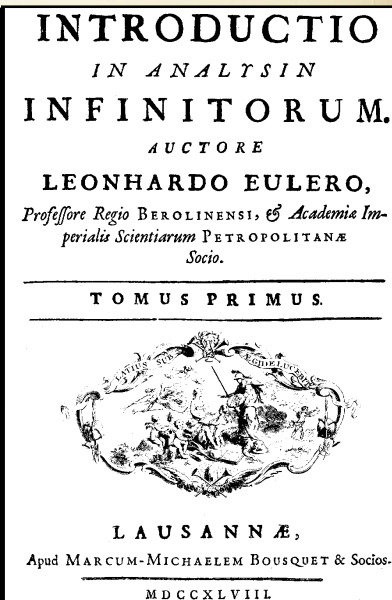
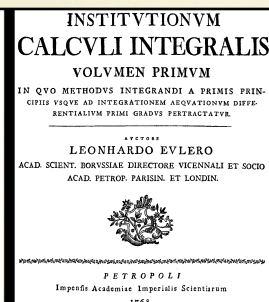
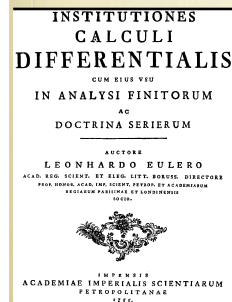
• Académie de Saint-Petersbourg (59 à 76)

Catherine la Grande, école russe

46

Publications : quelques points forts

- **Introductio** 1748 **2587 pages**
- **Calcul différentiel et intégral** 1755-1770
- **Lettres à une princesse d'Allemagne** 1768 **bestseller**
- **Algèbre** (russe, allemand, français, latin, anglais..) 1770



48

KH 4

+ Le partiel de 2015 et son corrigé

+ feuille de dix primitives...

Math Analyse II (séq 4) printemps 2016

Cours de Francis Clarke

Khôle 4 (25 min)

1. Parmi les suivantes, indiquer la date de naissance de Leonhard Euler :

1583, 1789, 1707, 1636, 1815, 1948

2. Trouver la solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y' = 6xy^2$ qui satisfait $y(0) = 1$.

3. On s'intéresse à l'intégrale indéfinie $I := \int \frac{2 + \sin \theta}{\cos \theta \sin^2 \theta} d\theta$, où $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(a) Mettre en œuvre un changement de variable qui transforme I en $J := \int \frac{2 + u}{(1 - u^2)u^2} du$.

(b) Calculer J , et déterminer I par conséquent.

4. Expliquer pourquoi l'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ est bien définie, et calculer sa valeur.

5. Étudier l'intégrale impropre $\int_2^\infty \frac{xdx}{x^2 - 1}$.

6. Simplifier l'expression $\sin(2 \arctan x)$

49

50

KH 4
corrigé

1. 1707

2. On sépare : $dy/y^2 = 6xdx \implies -1/y = 3x^2 + C$.

On trouve $C = -1 \implies y(x) = (1 - 3x^2)^{-1}$.

3(a) On pose $u = \sin \theta \dots$

(b) La décomposition $\frac{2+u}{(1-u^2)u^2} = \frac{1}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{3/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}$ donne

$$J = \ln|u| - \frac{2}{u} - \frac{3}{2} \ln|u-1| + \frac{1}{2} \ln|u+1| + C.$$

On remplace u par $\sin \theta$; puisque $0 < \sin \theta < 1$, on trouve la réponse

$$I = \ln(\sin \theta) - \frac{2}{\sin \theta} - \frac{3}{2} \ln(1 - \sin \theta) + \frac{1}{2} \ln(1 + \sin \theta) + C$$

4. Le dénominateur de la fonction intégrée ne s'annule jamais ; la fonction est alors continue sur la droite, donc intégrable sur tout intervalle, en particulier sur $[-1, 0]$. On trouve la primitive $\arctan(x+1)$ et ensuite la valeur $\arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4$.

51

KH 4
corrigé (suite et fin)

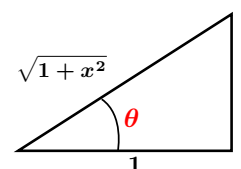
5. On observe que la fonction intégrée est continue sur $[2, \infty[$, car c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas dans l'intervalle concerné. On trouve

$$\int \frac{xdx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + C,$$

$$\text{d'où } J_T := \int_2^T \frac{xdx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) \Big|_2^T = \frac{1}{2} \ln(T^2 - 1) - \frac{1}{2} \ln 3.$$

Puisque $\lim_{T \rightarrow \infty} J_T = +\infty$, on en déduit que l'intégrale impropre J ne converge pas, mais diverge vers $+\infty$.

6.

$$\begin{aligned} \sin(2 \arctan x) &= 2 \sin(\arctan x) \cos(\arctan x) \\ &= 2 \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$


52

Le partiel de 2015 et son
corrigé suivent...

3. (5 pts) On s'intéresse à l'intégrale indéfinie $I := \int \frac{2 + \sin \theta}{\cos \theta \sin^2 \theta} d\theta$, où $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(a) Mettre en œuvre un changement de variable qui transforme I en $J := \int \frac{2+u}{(1-u^2)u^2} du$.

(b) Calculer J , et déterminer I par conséquent.

4. (5 pts) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}$.

(a) Prouver que f est continue dans l'intervalle ouvert $]0, 4[$.

(b) Déterminer $\int f(x) dx$.

(c) Expliquer pourquoi l'intégrale L suivante est dite *impropre* : $L = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}$.

(d) Montrer que L converge et trouver sa valeur.

53

55

Math Analyse II Cours de Francis Clarke Partiel du 22 avril 2015

L'utilisation de documents de toute nature, de calculatrices, de téléphones ou autres appareils électroniques n'est pas autorisée. Le total des points est de 24 (la note étant plafonnée à 20).

1. (8 pts)

(a) Trouver la solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y' = 6xy^2$ qui satisfait $y(0) = 1$.

(b) Calculer $\int \sqrt{e^x - 1} dx$ en utilisant un changement de variable.

(c) Calculer $\int t^2 \ln t dt$ en utilisant l'intégration par parties.

(d) Simplifier l'expression $\sin\left(2 \arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right)$.

ancien partiel : p. 1

2. (6 pts) On définit une fonction $x \mapsto f(x)$ par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 8x + 20}$.

(a) Pourquoi la fonction f est-elle définie et continue partout sur la droite ?

(b) Déterminer $\int f(x) dx$.

(c) Prouver que l'intégrale impropre $\int_1^\infty f(x) dx$ diverge vers $+\infty$.

(d) Sans calculer sa valeur, prouver que l'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{x dx}{(x^2 + 8x + 20)^2}$ converge.

54

ancien partiel corrigé : p. 1

Analyse II Cours de Francis Clarke Partiel du 22 avril 2015 : correction rapide

1(a) On sépare : $dy/y^2 = 6x dx \Rightarrow -1/y = 3x^2 + C$. On trouve $C = -1 \Rightarrow y(x) = (1 - 3x^2)^{-1}$.

(b) On pose $\sqrt{e^x - 1} = u \Rightarrow e^x - 1 = u^2$, d'où $e^x dx = 2u du \Rightarrow dx = 2u du / (1 + u^2)$. On trouve

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x - 1} dx &= \int \frac{2u^2 du}{1+u^2} = 2 \int du - 2 \int \frac{du}{1+u^2} = 2u - 2 \arctan u + C \\ &= 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C. \end{aligned}$$

(c) On prend $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln t$, d'où $u = t^3/3$ et

$$\begin{aligned} \int u'v &= uv - \int uv' = \frac{t^3}{3} \times \ln t - \int \frac{t^3}{3} \times \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{1}{9} t^3 + C. \end{aligned}$$

(d) Soit $\theta = \arctan(x/3)$. Alors $\sin \theta = x/\sqrt{x^2+9}$ et $\cos \theta = 3/\sqrt{x^2+9}$ ($\cos \theta > 0$ puisque $-\pi/2 < \theta < \pi/2$). Donc $\sin(2 \arctan(x/3)) = \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \times \cos \theta = 6x/(x^2+9)$.

56

ancien partiel corrigé : p. 2

2(a) f est le quotient de deux fonctions continues, et le dénominateur n'est jamais nul (le trinôme étant irréductible).

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \int \frac{x dx}{x^2 + 8x + 20} &= \int \frac{x dx}{(x+4)^2 + 4} = \int \frac{u-4}{u^2+4} du \quad (\text{où } u = x+4) \\ &= \int \frac{u du}{u^2+4} - 4 \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2} \ln(u^2+4) - 4 \times \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 8x + 20) - 2 \arctan\left(\frac{x+4}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \int_1^T f(x) dx &= \left\{ \frac{1}{2} \ln(x^2 + 8x + 20) - 2 \arctan\left(\frac{x+4}{2}\right) \right\} \Big|_1^T \\ &= \frac{1}{2} \ln(T^2 + 8T + 20) - 2 \arctan\left(\frac{T+4}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln 29 + 2 \arctan(5/2), \end{aligned}$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque $T \rightarrow +\infty$ (sachant que la fonction $\arctan$ est bornée).

(d) Pour $x \geq 1$, on a $0 \leq \frac{x}{(x^2 + 8x + 20)^2} \leq \frac{x}{(x^2)^2} = \frac{1}{x^3}$. Puisque $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ converge, il suit par comparaison que l'intégrale en question converge aussi.

57

3(a) On pose $u = \sin \theta \dots$

(b) La décomposition $\frac{2+u}{(1-u^2)u^2} = \frac{1}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{3/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}$ donne

$$J = \ln|u| - \frac{2}{u} - \frac{3}{2} \ln|u-1| + \frac{1}{2} \ln|u+1| + C.$$

On remplace u par $\sin \theta$; puisque $0 < \sin \theta < 1$, on trouve la réponse

$$I = \ln(\sin \theta) - \frac{2}{\sin \theta} - \frac{3}{2} \ln(1 - \sin \theta) + \frac{1}{2} \ln(1 + \sin \theta) + C$$

4(a) La fonction $6x - x^2$ admet ses racines en 0 et 6 ; elle est strictement positive dans $]0, 4[$, donc la fonction $x \mapsto \sqrt{6x - x^2}$ est continue (composée de fonctions continues), ainsi que sa réciproque f .

(b) Puisque $6x - x^2 = 9 - (x-3)^2$, on pose $u = x-3$ et l'intégrale devient

$$\int \frac{du}{\sqrt{9-u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{3}\right) + C = \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right) + C.$$

(c) La fonction f intégrée est continue sur $]0, 3]$ mais admet une asymptote verticale en $x = 0$.

(d) Par (b) on trouve, pour $\varepsilon > 0$ petit,

$$\int_\varepsilon^3 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \arcsin 0 - \arcsin\left(\frac{\varepsilon-3}{3}\right),$$

ce qui tend vers $-\arcsin(-1) = \pi/2$ quand $\varepsilon \downarrow 0$. Donc L converge, et sa valeur est $\pi/2$.

58

(a) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

(b) $\int \frac{\cos^3 \theta}{1 - \sin \theta} d\theta$

(c) $\int \frac{dx}{\frac{1}{2} + \sin^2 x}$

(d) $\int \frac{dv}{\sqrt{v} + \sqrt{v-2}}$

(e) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x}$

(f) $\int \frac{\tan \theta}{1 + \cos \theta} d\theta$

(g) $\int \frac{t^2}{1-t} dt$

(h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

(i) $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$

(j) $\int \frac{1}{t^2} \ln(1+t^2) dt$

Indications :

- (a) commencer par un changement de variable naturel
- (c) poser $t = \tan x$, ou mieux $x = \arctan t$
- (e) factoriser le dénominateur
- (h) le changement de variable $x = y^6$ se suggère tout naturellement
- (i) il est tentant de poser $x = 2 \sin \theta$, ou $\theta = \arcsin(x/2)$
- (a) à (j) : vérifier la réponse

59

ancien partiel corrigé : p. 3

Fin du sixième cours

60

feuille de dix primitives...