Analyse II : Intégration et approximation

MAT1009L / séquence 4 / printemps 2016

cours de Francis Clarke

CM5 :

1. Peut-on tout intégrer ?
2. Fonctions circulaires (rappel)
3. L'équation différentielle logistique
4. Les fractions rationnelles
5. La fonction arctan
6. Les intégrales impropres (type 1)

Analyse II   Calendrier 2016 (les mercredi)

27 janvier	cours	TD	
3 février	cours	TD	
10 février	cours	TD	
17 février	cours	TD	← DS1
~~24 février~~	~~cours~~	~~TD~~	(congé de travail intensif chez soi)
2 mars	cours	TD	
9 mars	cours	TD	
~~16 mars~~	~~cours~~	~~TD~~	(CC en commun, on ne participe pas)
23 mars	cours	TD	← partiel 1
30 mars	cours	TD	
6 avril	cours	TD	
13 avril	cours	TD	← DS 2 ?
~~20 avril~~	~~cours~~	~~TD~~	(congé de travail intensif chez soi)
27 avril	cours	TD	
4 mai	cours	TD	← partiel 2 ?

CC final : entre le 30 mai et le 8 juin

Rappel L'intégrale suivante figure beaucoup en proba-stats, à cause de la **distribution normale** :

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Elle n'est pas simplifiable, car la fonction

$$t \mapsto e^{-t^2}$$

n'admet aucune primitive engendrée par les *fonctions élémentaires.*

Étant continue, elle admet une primitive bien sûr ; par exemple, la fonction

$$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt\,.$$

Rq: La fonction

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

est présente sur beaucoup de calculettes.

Autres exemples de fonction n'admettant pas de primitive explicite :

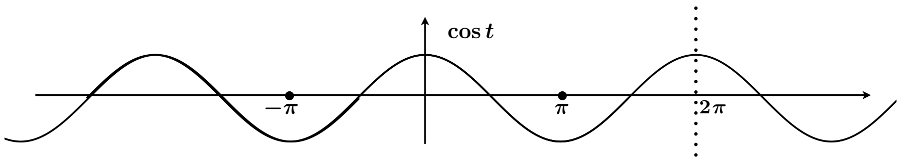
$$\frac{e^{t^2}}{t},\quad \frac{e^u}{u},\quad \frac{1}{\ln x},\quad \sin x^2,\quad \frac{\sin y}{y}$$

Mais les fonctions suivantes sont faciles à intégrer :

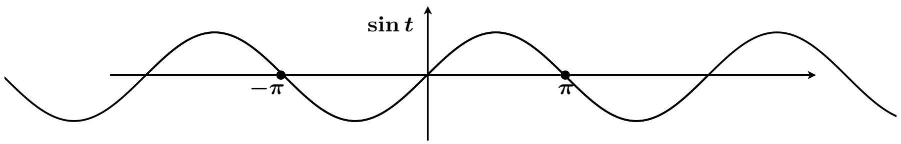
$$t\,e^{t^2},\quad u^3e^{u^2}\quad \frac{1}{x\ln x},\quad x\sin x^2,\quad y\sin y$$

Les fonctions circulaires : rappel

Rappel : on a donné une définition rigoureuse de sinus et cosinus



$$\sin(x + 2\pi) \;=\; \sin x\,, \quad \cos(x + 2\pi) \;=\; \cos x \quad \forall\, x$$



La fonction tangente. La fonction tan est définie comme suit:

$$\tan x \;:=\; \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

Evidemment, le domaine de tan ne contient pas les points x où $\cos x \;=\; 0$, c'est-à-dire,

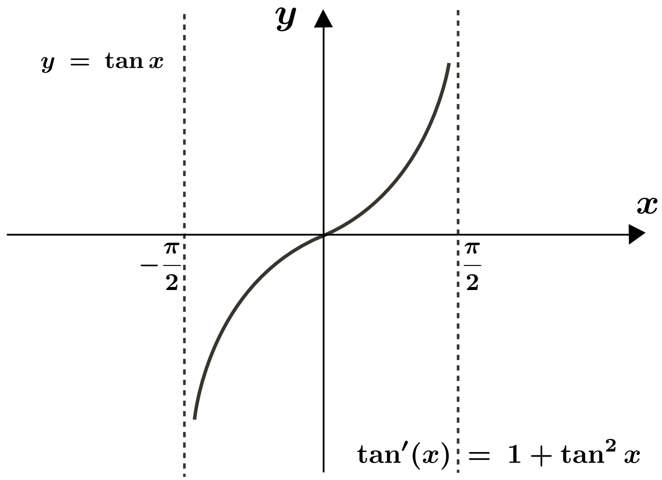
$$x \;=\; \pi/2 \pm n\pi \;(n \in \mathbb{N}).$$

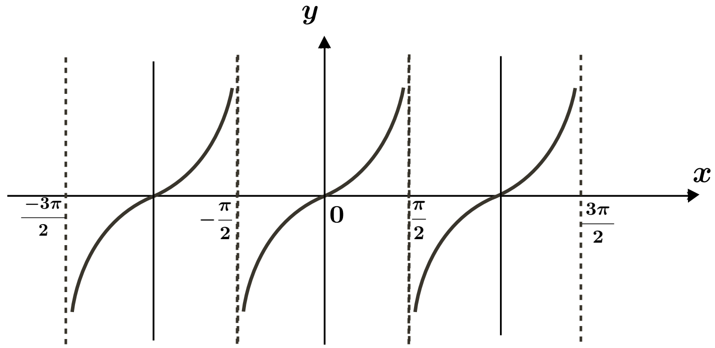
A partir des propriétés connues de sinus et cosinus, on déduit facilement les propriétés de la tangente, notamment

$$(\tan x)' \;=\; \frac{1}{\cos^2(x)} \;=\; 1 + \tan^2 x\,.$$

$$\tan(x+\pi) \;=\; \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \;=\; \frac{-\sin x}{-\cos x} \;=\; \tan x$$

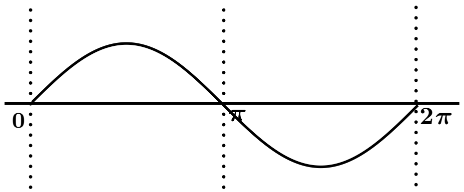
$\Longrightarrow$ **tan est périodique, de période π**



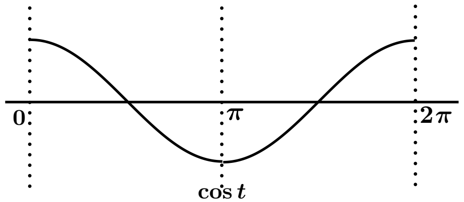


$y = \tan x$

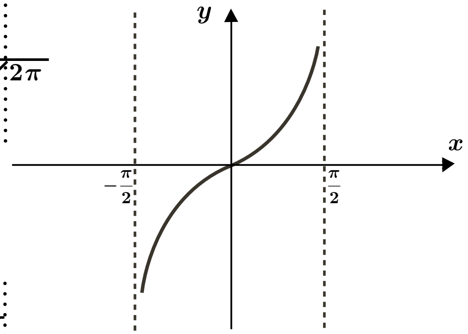
sin/cos/tan : Résumé 1



$\sin t$



$\cos t$



$y = \tan x$

sin/cos/tan : Résumé 2

Les formules d'addition

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\,, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\,. \end{aligned}$$

Les formules complémentaires

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos(\pi/2 - x) \\ \cos x &= \sin(\pi/2 - x) \end{aligned}$$

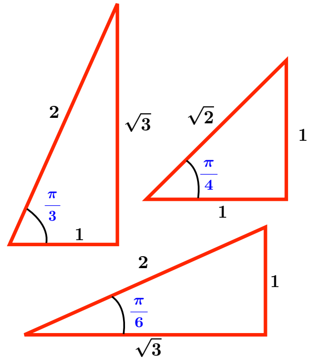
Les formules de duplication

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

La formule circulaire : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Dérivées:

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ &= 1 + \tan^2 x \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \end{aligned}$$



Exemple

Trouver

$$\int \cos^2 x \, dx$$

On sait que

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \tfrac{1}{2} \int 1 \, dx + \tfrac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x \cos x + C \end{aligned}$$

confirmer !

Exemple Trouver

$$\int \tan^3\theta \, d\theta$$

$$\tan^3\theta = \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = \frac{\sin^2\theta\sin\theta}{\cos^3\theta} = \frac{(1-\cos^2\theta)\sin\theta}{\cos^3\theta}$$

On pose $x := \cos\theta \implies dx = -\sin\theta \, d\theta$

Alors

$$\begin{aligned}\int \tan^3\theta \, d\theta &= \int \frac{(1-\cos^2\theta)\sin\theta}{\cos^3\theta} d\theta \\ &= \int \frac{(1-x^2)(-dx)}{x^3} \\ &= \int \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right\} dx \\ &= \ln|x| + \tfrac{1}{2}x^{-2} + C \\ &= \ln(|\cos\theta|) + \frac{1}{2\cos^2\theta} + C\end{aligned}$$

L'équation logistique en théorie des populations

Soit $y(t)$ la taille (souvent la *biomasse*) d'une population en fonction du temps t.

La *croissance exponentielle* correspond à une croissance proportionnelle y'/y constante : $y'/y = k$.

Ceci implique $y(t) = y(0)e^{kt}$, qui ne peut pas être vrai à long terme.

La *croissance logistique* est un modèle plus réaliste qui est très courant dans la modélisation des ressources renouvelables.

Il suppose que la croissance proportionnelle y'/y diminue :

$$y'/y = k(M-y),$$

où M est la population maximale.

On étudie la célèbre équation différentielle (Verhulst 1845)

$$y' = ky(M-y).$$

$$y' = ky(M-y), \quad y(0) = y_0 > 0.$$

L'équadiff $\dfrac{dy}{dt} = ky(M-y)$ est séparable.

On écrit $\dfrac{dy}{y(M-y)} = kdt$

Ensuite on intègre des deux côtés

Une certain réécriture est très utile:

$$\frac{1}{y(M-y)} = \frac{1/M}{y} + \frac{1/M}{M-y}$$

On trouve

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y(M-y)} &= \tfrac{1}{M}\int \frac{dy}{y} + \tfrac{1}{M}\int \frac{dy}{M-y} \\ &= \tfrac{1}{M}\ln y - \tfrac{1}{M}\ln(M-y) \\ &= \tfrac{1}{M}\ln\left[\frac{y}{M-y}\right] \\ &= kt + C\end{aligned}$$

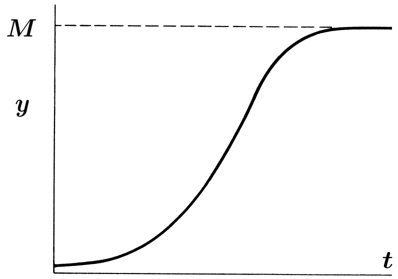
$$\frac{1}{M}\ln\left[\frac{y}{M-y}\right] = kt + C \qquad (L>0)$$

$$\Longrightarrow\ y(t) = M\frac{Le^{kMt}}{1+Le^{kMt}}$$ (donc $0 < y(t) < M$ toujours)

La valeur de L est déterminée par la condition initiale :

$$y_0 = y(0) = M\frac{L}{1+L}$$

On trace le graphe de $y(t)$:



Une classe importante de fonctions, et comment les intégrer:

les fractions rationnelles

On commence par quelques rappels sur les polynômes

Un *polynôme* veut dire une fonction de la forme

$$x \mapsto P(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

où n est un entier positif. Le polynôme $P(x)$ est de *degré* n lorsque $a_0 \neq 0$.

Un trinôme $x^2 + bx + c$ est dit *irréductible* lorsqu'il n'admet aucune racine réelle. Ceci équivaut à la condition que son discriminant soit négatif: $b^2 - 4c < 0$.

Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $P(x)$ un polynôme. Alors $P(x)$ admet une factorisation unique

$$P(x) = a_0 \prod_i (x - r_i)^{m_i} \prod_j (x^2 + b_jx + c_j)^{p_j}$$

où les trinômes $x^2 + b_jx + c_j$ sont irréductibles et distincts, et où les nombres r_i sont distincts.

Les r_i sont alors les racines réelles de $P(x)$, et on dit que r_i est une racine de *multiplicité* m_i.

Exemple

$$P(x) = x^4 + x^3 - x - 1 \qquad \text{degré } 4$$

On trouve que le nombre 1 est une racine, d'où

$$x^4 + x^3 - x - 1 = (x-1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$$

On trouve que le nombre -1 est une racine du second facteur, d'où

$$x^4 + x^3 - x - 1 = (x-1)(x+1)\underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{irréductible}}$$

Remarque: la factorisation suivante n'est PAS utile:

$$x^4 + x^3 - x - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)$$

Une fraction rationnelle veut dire une fonction f(x) de la forme

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont des polynômes.

Elle est dite propre lorsque degré P < degré Q

En algèbre, on montre le théorème de décomposition suivant pour les fractions rationnelles propres.

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle $\boxed{\textit{propre.}}$
Soit

$$Q(x) = a_0 \prod_i (x - r_i)^{m_i} \prod_j (x^2 + b_j x + c_j)^{p_j}$$

la factorisation canonique de $Q(x)$. Alors f s'écrit comme une somme de termes ayant la forme

$$\frac{\alpha_k}{(x - r_i)^k} \quad (k = 1, 2, \ldots, m_i) \quad \text{et}$$

$$\frac{\beta_\ell x + \lambda_\ell}{(x^2 + b_j x + c_j)^\ell} \quad (\ell = 1, 2, \ldots, p_j).$$

Remarque: En général, tous ces termes doivent figurer dans la décomposition

Exemple

$$\frac{2x^7 + 8x^6 + 13x^5 + 20x^4 + 15x^3 + 16x^2 + 7x + 10}{\underbrace{(x^2+x+1)^2}\underbrace{(x^2+2x+2)}\underbrace{(x-1)^2}}$$

Propre ? Oui

$$= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2} + \frac{ex+f}{x^2+x+1} + \frac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}$$

$$a = 1, \ b = 2, \ c = 1, \ d = 3,$$
$$e = 0, \ f = 0, \ g = 0, \ h = 1.$$

Un exemple beaucoup plus raisonnable

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{\alpha_1}{x-1} + \frac{\alpha_2}{x+1}$$
$$= \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}$$

D'où

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$
$$= \frac{1}{2}\{\ \ln|x-1| - \ln|x+1|\} + C$$

Remarque

On sait que

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\alpha_1}{x-1} + \frac{\alpha_2}{x+1}$$
$$\Downarrow$$
$$(x-1)\times\frac{1}{x^2-1} = (x-1)\times\frac{\alpha_1}{x-1} + (x-1)\times\frac{\alpha_2}{x+1}$$

$\frac{1}{2}$ Laissons x tendre vers 1 : α_1 0

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} = \alpha_1$$

(de même on trouve $\alpha_2 = -1/2$, en multipliant par $x+1$)

Utilisation de la décomposition pour l'intégration

On décompose donc une fraction rationnelle propre en des termes ayant la forme

$$\frac{1}{(x+\alpha)^n} \quad \text{et} \quad \frac{x+\alpha}{(x^2+bx+c)^n} \quad (n \geqslant 1),$$

où x^2+bx+c est irréductible.

Les premiers sont faciles à intégrer.

Qu'en est-il des seconds?

Comment déterminer

$$\int \frac{x+\alpha}{(x^2+bx+c)^n}\, dx \quad (n \geqslant 1),$$

où x^2+bx+c est irréductible.

$$\int \frac{x+\alpha}{(x^2+bx+c)^n}\, dx =$$
$$\underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\, dx} + (\alpha - b/2)\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n}}_{?}$$

$$\begin{cases} \ln(x^2+bx+c) + C & \text{si} \quad n = 1 \\ (x^2+bx+c)^{1-n}/(1-n) + C & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

Conclusion: il reste à calculer :

$$\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n}$$

Considérons dans un premier temps n = 1

On écrit $x^2+bx+c \;=\; x^2+bx+b^2/4+c-b^2/4$
$\qquad\qquad = \; (x+b/2)^2+k^2$

(le terme $c-b^2/4$ s'écrit dans la forme k^2, étant positif parce que le trinôme est irréductible).

Ensuite:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)} &= \int \frac{dx}{(x+b/2)^2+k^2} \\ &= (1/k^2)\int \frac{dx}{\left(\frac{x+b/2}{k}\right)^2+1} \\ &= (1/k)\int \frac{dy}{y^2+1},\end{aligned}$$

en posant $y = \dfrac{x+b/2}{k}$.

Conclusion : Pour pouvoir calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$ (trinôme irréductible), il suffir de pouvoir calculer

$$\int \frac{dy}{1+y^2}$$

Soit $g(\cdot)$ une primitive pour la fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)$, et prenons $g(0)=0$. Donc

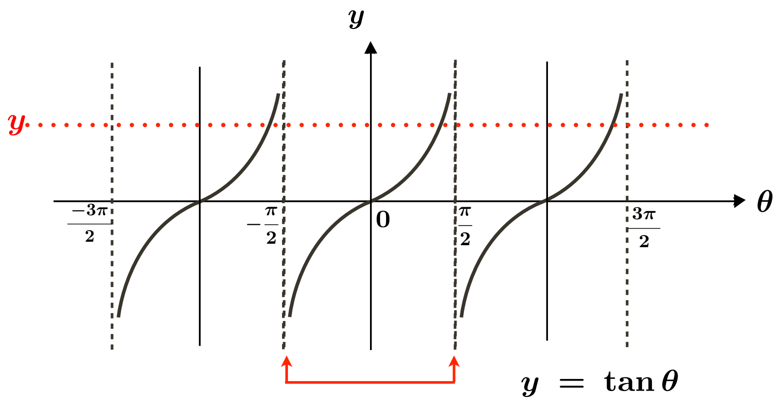
$$g(y) \;=\; \int_0^y \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

On fait un changement de variable $t = \tan\theta$: on a $dt = d\theta/\cos^2\theta$ et

$$\begin{aligned}g(y) \;&=\; \int_0^y \frac{dt}{1+t^2} \;=\; \int_0^{\bar\theta} \frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)\cos^2\theta} \\ &=\; \int_0^{\bar\theta} d\theta \;=\; \theta\Big|_0^{\bar\theta} \;=\; \bar\theta\,,\end{aligned}$$

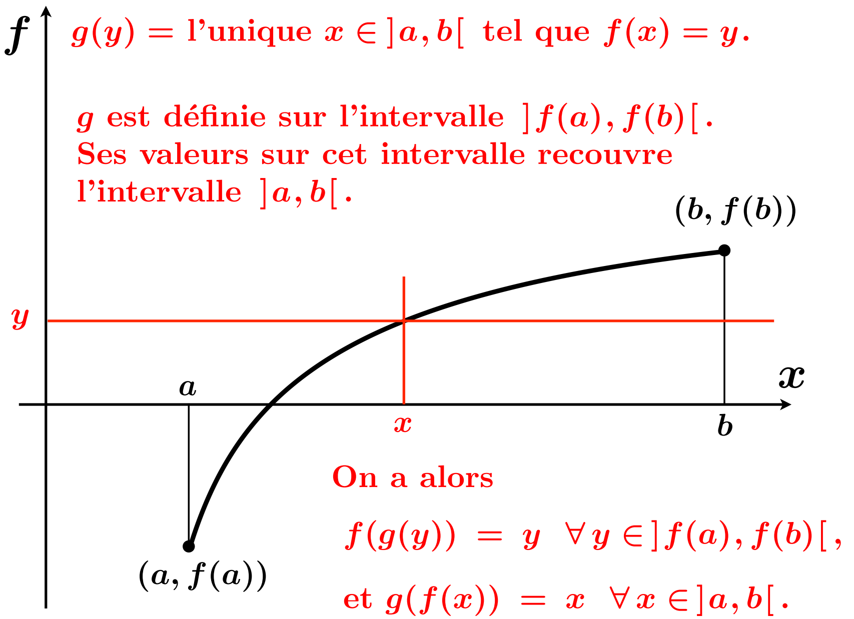
où $\bar\theta$ est l'angle tel que $\tan\bar\theta \;=\; y$.

Donc g serait la fonction inverse à tan

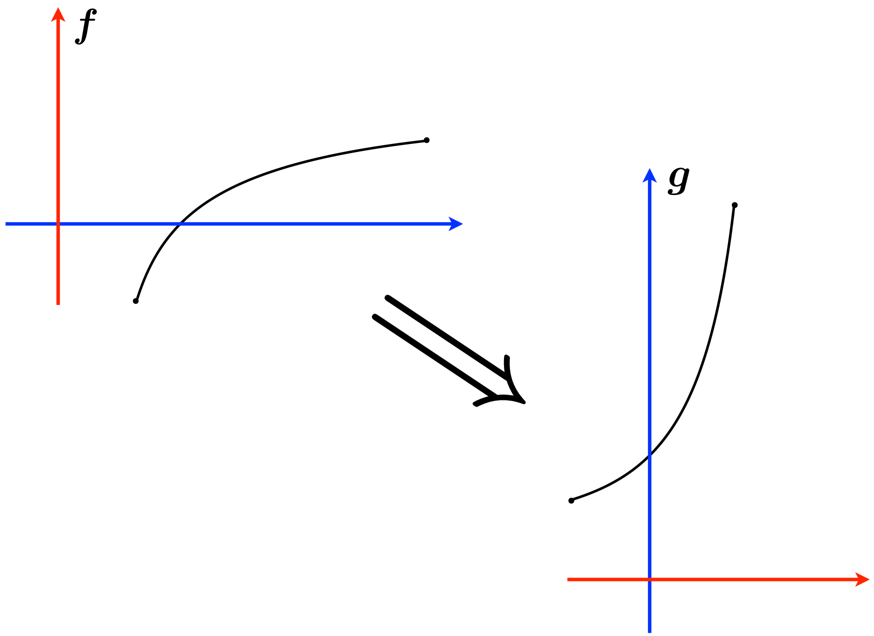


Pour un réel y quelconque, on prend pour $g(y)$ (c-à-d, $\bar\theta$) l'unique valeur $\bar\theta$ dans l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ telle que $\tan\bar\theta = y$.

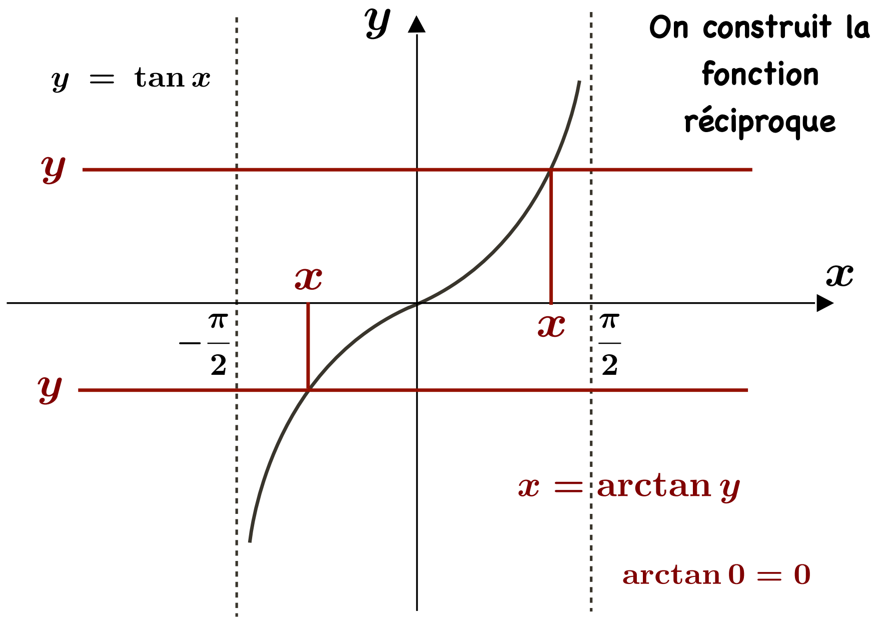
En fait on donne le nom arctan à la fonction ainsi définie : $\bar\theta = \arctan y$. (arc = angle)


f
$g(y) =$ l'unique $x \in \,]a, b[$ tel que $f(x) = y$.
g est définie sur l'intervalle $]f(a), f(b)[$.
Ses valeurs sur cet intervalle recouvre
l'intervalle $]a, b[$.
$(b, f(b))$
y
a
x
x
b
On a alors
$f(g(y)) = y \quad \forall y \in \,]f(a), f(b)[$,
$(a, f(a))$
et $g(f(x)) = x \quad \forall x \in \,]a, b[$.

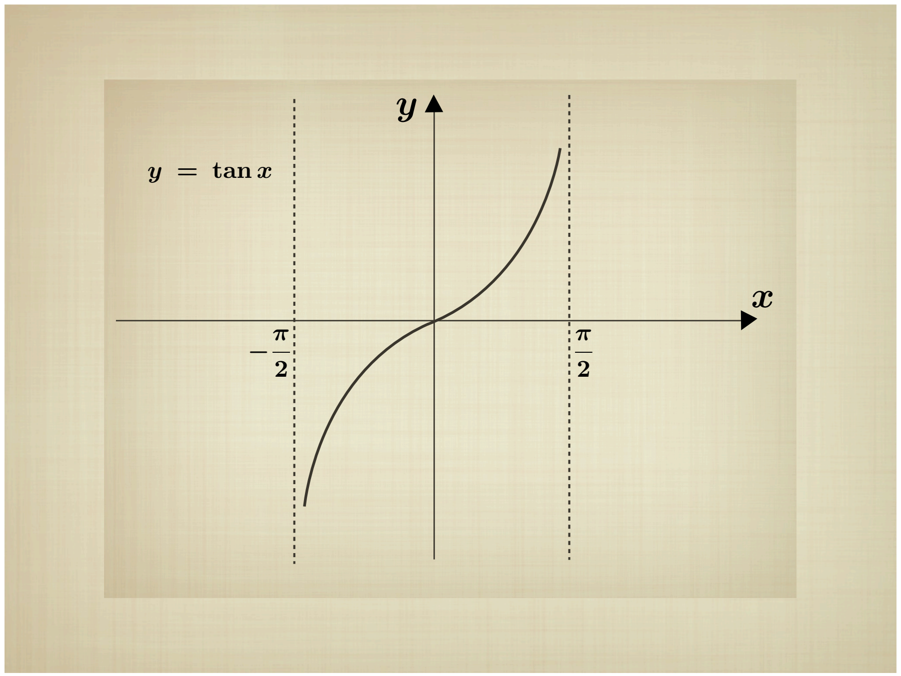
33


f
g

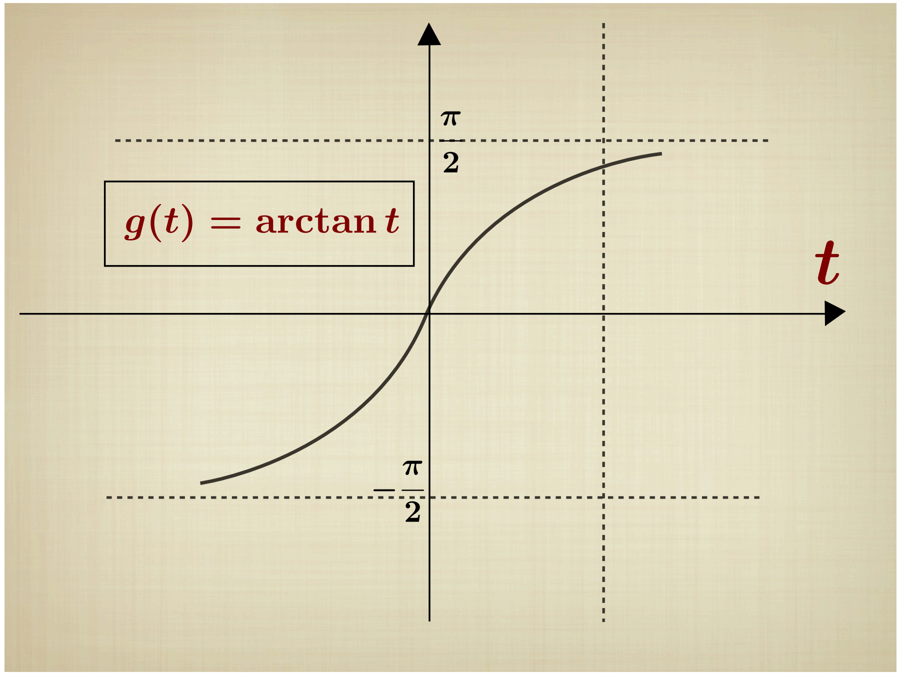
34


$y = \tan x$
y
On construit la
fonction
réciproque
y
x
x
$-\frac{\pi}{2}$
x
$\frac{\pi}{2}$
y
$x = \arctan y$
$\arctan 0 = 0$

35


y
$y = \tan x$
x
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$

36



Théorème. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, dérivable dans $]a, b[$, avec $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in]a, b[$. Pour tout y dans l'intervalle $[f(a), f(b)]$, on définit $g(y)$ comme étant l'unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$. Alors g est continue et strictement croissante sur $[f(a), f(b)]$, ainsi que dérivable dans $]f(a), f(b)[$. On a

$$g(f(x)) = x \ \forall x \in [a, b], \quad f(g(y)) = y \ \forall y \in [f(a), f(b)],$$

et

$$g'(y) = \frac{d}{dy} g(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Il suit que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $\tan(\arctan t) = t \implies$

(puisque $(\tan)' = 1 + \tan^2$)

$$\{1 + \tan^2(\arctan t)\}(\arctan)'(t) = 1$$

$$\implies \{1 + t^2\}(\arctan)'(t) = 1$$

$$\implies \arctan'(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$

Rq: On a toujours, par définition,

$$\tan(\arctan t) = t\,.$$

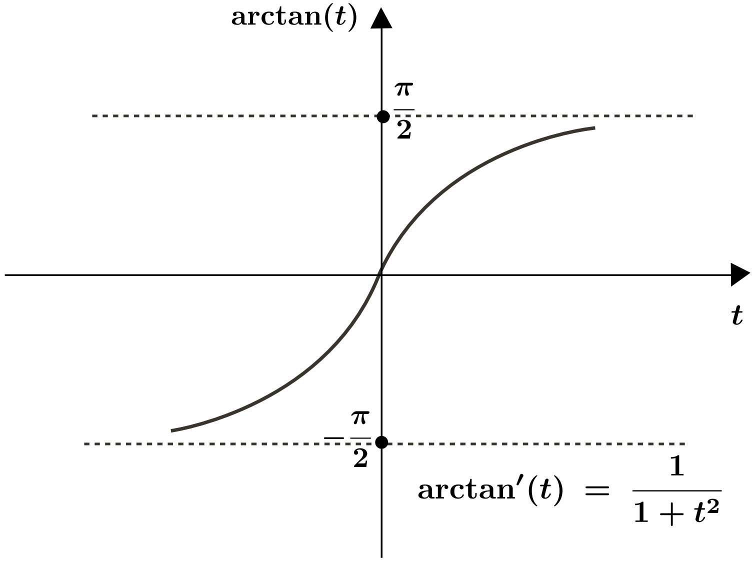
A-t-on toujours

$$\arctan(\tan t) = t\,?$$

Non Seulement lorsque t appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(autrement les deux côtés diffèrent par un multiple de π)

Résumé: la fonction arctan



$$\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

un tableau de primitives un peu plus garni

fonction	primitive	fonction	primitive
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x	$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\dfrac{1}{a^2+x^2} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	e^{x^2}	**?**

Fonctions de type $\dfrac{1}{x^2+bx+c}$

On écrit

$$\frac{1}{x^2+bx+c} = \frac{1}{x^2+bx+b^2/4+c-b^2/4} = \frac{1}{(x+b/2)^2+c-b^2/4}$$

Supposons que $c - b^2/4 > 0$. Posons $c - b^2/4 =: \delta^2$.

Alors

$$\frac{1}{(x+b/2)^2+c-b^2/4} = \frac{1}{(x+b/2)^2+\delta^2} = \frac{1/\delta^2}{\left(\frac{x+b/2}{\delta}\right)^2+1}$$

On fait un changement de variable: $u = \frac{x+b/2}{\delta} \implies du = \frac{1}{\delta}dx$.

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{1/\delta^2\,dx}{\left(\frac{x+b/2}{\delta}\right)^2+1} = \int \frac{(1/\delta^2)\,(\delta\,du)}{(u^2+1)}$$
$$= \frac{1}{\delta}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\delta}\arctan u + C$$
$$= \frac{1}{\delta}\arctan\left(\frac{x+b/2}{\delta}\right) + C$$

confirmer!

On a pu traiter les fonctions de type $\dfrac{1}{x^2+bx+c}$ lorsque $c - b^2/4 > 0$.

Rappel: Le *discriminant* Δ d'un trinôme ax^2+bx+c veut dire le nombre $\Delta := b^2 - 4ac$.

Le trinôme est *irréductible* (c-à-d n'admet pas de factorisation ou de racine rééle) si et seulement si $\Delta < 0$.

Conclusion: Ci-dessus, on a pu traiter les fonctions de type $\dfrac{1}{x^2+bx+c}$ lorsque x^2+bx+c est irréductible.

Qu'en est-il du cas réductible?

Exemple

Trouver

$$\int \frac{dx}{x^2 - x}$$

$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 0 = 1 > 0 \implies$ réductible

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x\,(x-1)}$$

D'où

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x} = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= -\ln|x| + \ln|x-1| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C\,.$$

Il ne reste qu'à calculer :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n}$$

pour n > 1

On a comme avant

$$\int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n} = \int \frac{dx}{[(x + b/2)^2 + k^2]^n}$$

$$= (1/k^{2n}) \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x+b/2}{k}\right)^2 + 1\right]^n}$$

$$= (1/k^{2n-1}) \int \frac{dy}{[y^2 + 1]^n}$$

où $y = \frac{x+b/2}{k}$

Suite à cette simplification, le seul élément restant à traiter est

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx \quad (n > 1)$$

On dispose d'une réduction d'ordre:

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. On a alors

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx \;=$$

$$\frac{1}{2n-2}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\, dx$$

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\, dx = \int \{x\}' \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\, dx \\
&= x\,\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \int x\,\frac{(1-n)(2x)}{(x^2+1)^n}\, dx \\
&= x\,\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\, dx \\
&= x\,\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^n}\, dx \\
&= x\,\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)I_n
\end{aligned}$$

...d'où la récurrence recherchée

Alternative (à la réduction d'ordre) pour calculer

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx \quad (n > 1)\ :$$

faire un changement de variable $x = \tan\theta$.

Ou plutôt (c'est préférable) $\theta = \arctan x$.

On a toujours $x = \tan\theta$, d'où $dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} &= \int \frac{(\cos^{-2}\theta)\, d\theta}{(\tan^2\theta+1)^n} \\
&= \int \frac{(\cos^{-2}\theta)\, d\theta}{(\cos^{-2}\theta)^n} \\
&= \int \cos^{2n-2}\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

utile pour n = 2...

Exemple Trouver $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$

Le changement de variable $\theta = \arctan x$ se suggère.

$$x = \tan\theta \implies dx = \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \\
&= \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta\,(1+\tan^2\theta)^{3/2}} \\
&= \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta\,\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{3/2}} \\
&= \int \cos\theta\, d\theta \\
&= \sin\theta + C = \sin(\arctan x) + C \\
&= \ ?
\end{aligned}$$

$\cos\theta > 0$ parce que $\theta = \arctan x$

$\implies \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

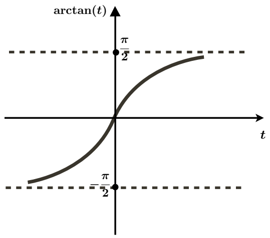
$= \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$ car

$\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Comment prouver que $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Posons $\theta = \arctan x$. Donc $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$,
et θ est du même signe que x.

On a $\tan\theta = x$ et $\cos\theta > 0$, d'où :



$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = x$$
$$\implies \sin^2\theta = x^2(1-\sin^2\theta)$$
$$\implies \sin^2\theta = \frac{x^2}{1+x^2}$$
$$\implies \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(car $\theta = \arctan x \implies \sin x$ est de même signe que x)

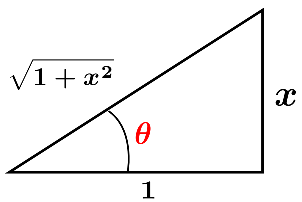
Du coup : $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ■

Raccourci géométrique

Proposition. On a : $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Posons $\theta = \arctan x$. Donc $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$,
et θ est du même signe que x.

On a $\tan\theta = x$. Considérons le cas $\theta > 0$.



D'où : $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(de même pour $x < 0$, car les deux côtés sont impairs) ■

On sait maintenant intégrer les fractions rationnelles propres...

Que faire d'une fraction rationnelle qui n'est pas propre?

Il faut diviser!

Exemple: Déterminer

$$\int \frac{x^5 - 2x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 + x + 1}\, dx$$

Il faut diviser

$$\frac{x^5 - 2x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 + x + 1} = \underbrace{x^3 - x^2 - 2x + 1}_{\text{le quotient}} + \frac{2x+2}{x^2+x+1}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & \boxed{+\,0x^4} & -2x^3 & -2x^2 & +x & +3 & x^2 + x + 1 \\
\hline
x^5 & +\,x^4 & +\,x^3 & & & & x^3 \quad -x^2 \quad -2x \quad +1 \\
\hline
 & -x^4 & -3x^3 & -2x^2 & & & \\
 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & & & \\
\hline
 & & -2x^3 & -x^2 & +x & & \\
 & & -2x^3 & -2x^2 & -2x & & \\
\hline
 & & & x^2 & +3x & +3 & \\
 & & & x^2 & +x & +1 & \\
\hline
 & & & & 2x & +2 &
\end{array}$$

le dividende

le diviseur

le reste

On a donc

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^5 - 2x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 + x + 1} \\
&= \underbrace{x^3 - x^2 - 2x + 1}_{\text{Q}} + \underbrace{\frac{2x + 2}{x^2 + x + 1}}_{\text{R/D}}
\end{aligned}
$$

Ceci nous permet de calculer une primitive pour f:

$$
f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 + \frac{2x+2}{x^2+x+1}
$$

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x \\
&\quad + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
&= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x + \ln(x^2+x+1) \\
&\quad + \int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + 3/4} \\
&= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x + \ln(x^2+x+1) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}}\right) + C
\end{aligned}
$$

fonction	primitive
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{a^2+x^2} \ (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

On se penche maintenant sur les intégrales impropres dans le contexte suivant :

Horizon non borné : $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Définition (et jargon)

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale impropre ou *généralisée*

$$
\int_a^\infty f(x)\,dx
$$

existe ou converge lorsque la limite suivante existe (dans $\mathbb{R}$):

$$
\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,.
$$

(Alors cette limite est la valeur de l'intégrale.)

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale n'existe pas, ou ne converge pas ou diverge.

Quand la limite est $+\infty$, on dit que l'intégrale (qui ne converge donc pas) diverge vers $+\infty$.

De même quand la limite est $-\infty$.

Rappel limites

L'écriture $\lim_{b \to \infty} F(b) = \ell$

équivaut à la condition suivante:
pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que

$$b > N \implies |F(b) - \ell| < \epsilon.$$

L'écriture $\lim_{b \to \infty} F(b) = +\infty$

ou la phrase "$F(b)$ *diverge vers* $+\infty$ *lorsque* b *tend vers* $+\infty$," équivaut à la condition suivante:

pour tout $M > 0$, il existe N tel que

$$b > N \implies F(b) > M.$$

Exemple Calculer $\int_a^\infty x e^{-x} dx$

En utilisant l'intégration par parties, on trouve

$$\int x e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + C,$$

d'où

$$\int_a^b x e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1)\Big|_a^b = e^{-a}(a+1) - e^{-b}(b+1)$$

On invoque la règle de L'Hospital (ou la croissance comparée) pour calculer

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b+1}{e^b} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b} = 0.$$

Conclusion: $\int_a^\infty x e^{-x} dx = e^{-a}(a+1)$

Exemple

Examinons la convergence éventuelle de l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\, dt.$$

On observe que la fonction $t \mapsto f(t) := 1/t$ est continue sur tout intervalle $[1, b]$, pour $b > 1$, une primitive pour la fonction étant $\ln t$.

Il vient

$$\int_1^b \frac{1}{t}\, dt = \ln t\Big|_1^b = \ln b.$$

Mais on sait que $\lim_{b \to +\infty} \ln b = +\infty$, et on déduit que l'intégrale sous étude ne converge pas, ou (mieux) diverge vers $+\infty$.

On examine maintenant l'éventuelle convergence de l'intégrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^p}\, dt \quad (p \neq 1).$$

Proposition. Si $p < 1$, alors l'intégrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^p}\, dt$$

diverge vers $+\infty$.

Démonstration. Quand $p < 1$ et $t \geq 1$, on a

$$t^p \leq t.$$

On a donc

$$\frac{1}{t^p} \geq \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad \int_1^b \frac{1}{t^p}\,dt \geq \int_1^b \frac{1}{t}\,dt$$

Puisque

$$\int_1^b \frac{1}{t}\,dt \to +\infty \text{ lorsque } b \to +\infty,$$

on en déduit que

$$\int_1^b \frac{1}{t^p}\,dt \to +\infty \text{ lorsque } b \to +\infty.$$

Proposition. Si $p > 1$, alors l'intégrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^p}\,dt$$

converge et vaut $1/(p-1)$.

Démonstration. Soit $p > 1$. On a

$$\int_1^b \frac{1}{t^p}\,dt = \left.\frac{t^{1-p}}{1-p}\right|_1^b = \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

Puisque $1 - p < 0$, le terme $b^{1-p} \to 0$ lorsque $b \to +\infty$. On en déduit que

$$\int_1^b \frac{1}{t^p}\,dt \to \frac{1}{p-1} \text{ lorsque } b \to +\infty.$$

Résumé. L'intégrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^p}\,dt$$

diverge vers $+\infty$ lorsque $p \leq 1$, et converge vers $1/(p-1)$ lorsque $p > 1$.

Exemple. On prouve que l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty \sin x\,dx$$

ne converge pas.

On a

$$\begin{aligned}\int_0^b \sin x\,dx &= -\cos x\,\Big|_0^b \\ &= -\cos b + 1\end{aligned}$$

et ceci n'admet pas de limite lorsque $b \to +\infty$ (comportement oscillatoire).

Rq Donc cette intégrale impropre diverge (car elle ne converge pas), mais elle ne diverge pas vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

La comparaison est utile pour déterminer la convergence/divergence d'une intégrale impropre

Notamment quand on ne peut pas trouver une primitive !

Exemple. Etudier l'éventuelle convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx\,.$$

Théorème. Soient f et g deux fonctions continues.

1. Si l'intégrale impropre

$$\int_a^\infty g(x)\,dx$$

diverge vers $+\infty$, et si, à partir d'un certain point c, f est minorée par g (voulant dire que $x \geq c \implies f(x) \geq g(x)$) alors l'intégrale impropre

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

diverge vers $+\infty$.

2. Si l'intégrale impropre

$$\int_a^\infty g(x)\,dx$$

converge, et si, à partir d'un certain point c, f est majorée par g et positive (voulant dire que $x \geq c \implies f(x) \leq g(x)$ et $f(x) \geq 0$) alors l'intégrale impropre

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

converge.

Démonstration de 1. Soit $b > \max(a, c)$. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &\geq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx \\ &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^c g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Lorsque $b \to +\infty$, on a (par hypothèse) $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \to +\infty$.

On en déduit autant pour f à la place de g. Donc l'intégrale impropre

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

diverge vers $+\infty$.

Démonstration de 2. Soit $b > \max(a, c)$. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &\leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx \\ &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^c g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Lorsque $b \to +\infty$, on sait (par hypothèse) que $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ tend vers une limite finie.

Donc la fonction

$$b \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

est majorée par une constante, ainsi que croissante (pour $b > c$). Elle converge donc vers une limite finie lorsque $b \to +\infty$; c'est-à-dire, l'intégrale impropre

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

converge.

Corollaire. Si, à partir d'un certain point c, la fonction f est positive et satisfait, pour une certaine constante C, la condition

$$\int_c^b f(x)\,dx \;\leqslant\; C \quad \forall\, b \,\geqslant\, c\,,$$

alors $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

Exemple:

Prouvons que l'intégrale impropre

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$$

converge.

L'intégrale impropre

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$$

converge:

Soit $b > 1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^b e^{-x^2/2}\,dx &= \int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx + \int_1^b \frac{dx}{e^{x^2/2}} \\
&\leq \int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx + \int_1^b \frac{dx}{e^{x/2}} \\
&= \int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx - 2e^{-x/2}\Big|_1^b \\
&= \int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx \underbrace{-\,2e^{-b/2}}_{\to\, 0} + 2e^{-1/2} \\
&\leq \text{constante}
\end{aligned}$$

Rappel:

$\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge

si f est positive et

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \,\leqslant\, C \quad \forall\, b \,\geqslant\, a$

Remarque On peut prouver que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2}} \;\Longrightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \;=\; \sqrt{2\pi}\,.$$

C'est un résultat de ...

Exemple. Etudier l'éventuelle convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx\,.$$

Résumé. L'intégrale impropre

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^p}\,dt$$

diverge vers $+\infty$ lorsque $p \leq 1$, et converge vers $1/(p-1)$ lorsque $p > 1$.

Il convient d'observer que quand x est grand, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}\,.$$

Pour cette raison, on anticipe que l'intégrale convergera (sans pouvoir calculer sa valeur).

Pour $x \geq 1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

Il suit par comparaison que l'intégrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$$

converge.

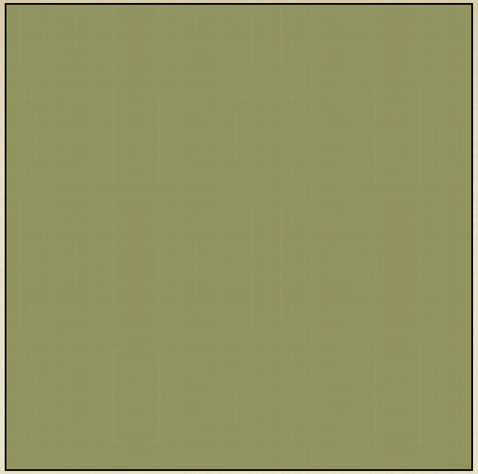
Mais pour $b > 1$ on a

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx + \int_1^b \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx.$$

La convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$$

s'ensuit.



Fin du cinquième cours