

Analyse II : Intégration et approximation

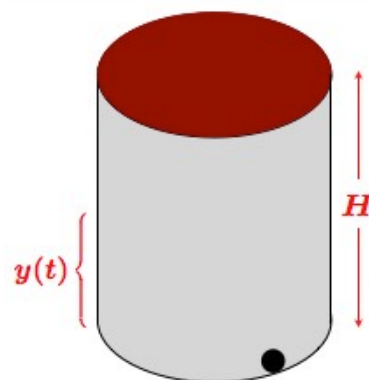
MAT1009L / séquence 4 / printemps 2016

cours de Francis Clarke

CM4 :

1. Equations différentielles séparables
2. Les fonctions ln et exp : Croissance comparée
3. Les fonctions circulaires
4. KH3

1



Un réservoir cylindrique de hauteur H et rayon R .

Au temps $t = 0$, un trou d'aire p est percé au fond.

Le niveau $y(t)$ passe de H à 0 en temps T . **Trouver T .**

Fait: (Torricelli) la vitesse du liquide à la sortie sera $p\sqrt{2gy(t)}$.

On en déduit $dV = \pi R^2 \times dy = -p\sqrt{2gy(t)} dt$

Donc $y(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{p\sqrt{2g}}{\pi R^2} \sqrt{y(t)} = -k\sqrt{y(t)}$$

Ainsi que la condition initiale $y(0) = H$.

3

Un des thèmes du cours :

Les équations différentielles

2

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y(t)}, \text{ où } y(0) = H \text{ (et } k = \frac{p\sqrt{2g}}{\pi R^2} \text{)}$$

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int (-k) dt \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{y} = -kt + C$$

Quand $t = 0$, on a $y = H \Rightarrow 2\sqrt{H} = C$

D'où $2\sqrt{y} = -kt + 2\sqrt{H}$

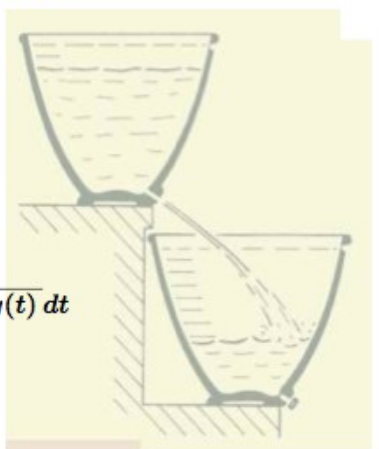
Pour trouver T :

$$y(T) = 0 \Rightarrow T = \frac{2\sqrt{H}}{k} = \frac{\sqrt{2H} \pi R^2}{p\sqrt{g}}$$

4

D'autres formes de réservoir donnent lieu à des équations différentielles $y' = f(y)$ différentes.

Rq: Quand le réservoir est le solide de révolution autour l'axe des y de la courbe $y = x^4$, la solution $y(t)$ est de la forme $y(t) = H - ct$, ce qui permet de calculer l'heure en regardant y ; de tels *clepsydras* ont servi pendant des milliers d'années.



Equation pour $y = x^4$:

$$R = x = y^{1/4} \Rightarrow$$

$$dV = \pi(y^{1/4})^2 \times dy = -p\sqrt{2gy(t)} dt$$

$$\Rightarrow dy = c dt$$

$$\Rightarrow y(t) = ct + m$$

Notre étude: L'équation différentielle

$$y'(x) = f(y(x)), \text{ ou } y' = f(y),$$

ou, de façon plus générale, $y' = f(x, y)$ lorsque $f(x, y)$ admet une écriture $f(x, y) = g(x)h(y)$.

De telles équadiffs sont appelés séparables.

L'équadiff est le plus souvent accompagnée d'une condition initiale $y(a) = A$.

La solution est trouvée en calculant des primitives ; son domaine de définition est un intervalle autour du point a .

Une équation différentielle séparable du premier ordre

$$y' = f(x, y) = g(x)h(y), \quad y(a) = A.$$

La procédure

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \Rightarrow F(y) = G(x) + C,$$

où F est une primitive pour h^{-1} et G pour g .

On utilise ensuite la condition $y(a) = A$ pour déterminer C .

On suppose
 g, h continues
et $h(A) \neq 0$.

Rq: Parfois on doit se contenter d'une relation $F(y) - G(x) = C$ qui détermine y comme *fonction implicite* de x (autour de $x = a$).

Exemple

Résoudre $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^3}, \quad y(0) = 1$

$$y^3 dy = x^2 dx \Rightarrow \frac{y^4}{4} = \frac{x^3}{3} + C$$

On trouve $C = 1/4$

$$\text{Donc } y^4 = \frac{4x^3}{3} + 1.$$

On peut écrire explicitement $y = (4x^3/3 + 1)^{1/4}$.
Mais cette solution n'est valable que pour x autour de 0. (Par exemple, elle ne vaut pas pour $x \leq -1$).

On vérifie la solution : $y(0) = 1$ ✓

$$4y^3 y' = 4x^2 \Rightarrow y' = x^2/y^3$$
 ✓

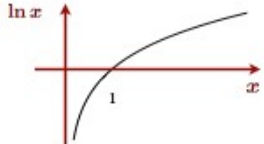
Retour aux fonctions ln et exp

Rappel

On a défini

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (x > 0)$$

Résumé :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln x &= \frac{1}{x} \\ \ln(xy) &= \ln x + \ln y \\ \ln(x/y) &= \ln x - \ln y \\ \ln(x^r) &= r \ln x \\ \ln 1 &= 0, \quad \lim_{x \downarrow 0} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{aligned}$$


9

Soit $\alpha > 0$. Il n'est pas évident de définir α^x quand x n'est pas rationnel.

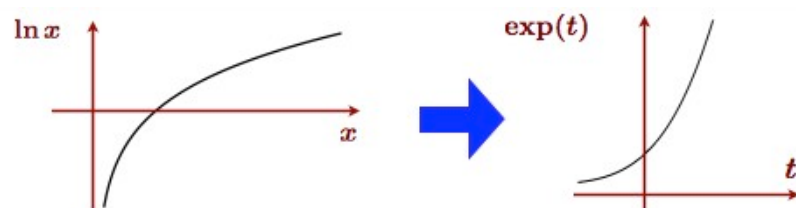
On a utilisé les fonctions ln et exp pour définir la fonction **exponentielle de base α** comme suit:

$$\alpha^x := \exp(x \ln \alpha) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Résumé :

$$\begin{aligned} \ln(\alpha^r) &= r \ln \alpha \quad (r \in \mathbb{R}) \\ \alpha^x \times \alpha^y &= \alpha^{x+y} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \\ \alpha^{rs} &= (\alpha^r)^s \quad (r, s \in \mathbb{R}) \\ \alpha^{x-y} &= \alpha^x / \alpha^y \quad (x, y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

11



Théorème. La fonction $t \mapsto \exp t$ est dérivable de tout ordre. Elle est positive et strictement croissante, avec

$$\begin{aligned} \exp(\ln x) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \\ \ln(\exp t) &= t \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ (\exp t)' &= \exp t. \end{aligned}$$

Elle satisfait de plus

$$\exp 0 = 1, \quad \lim_{t \downarrow -\infty} \exp t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp t = +\infty$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= (\exp x)(\exp y), \\ \exp(x-y) &= (\exp x)/(\exp y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

10

De la définition $\alpha^x = \exp(x \ln \alpha)$ on a prouvé

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$$

Exercice Calculer

$$\frac{d}{dx} \{10^{2x}\}$$

$$\Rightarrow 2(10^{2x})(\ln 10)$$

12

Le rôle de la fonction exponentielle en équations différentielles

Proposition. Soit f une fonction dérivable qui satisfait

$$f'(x) = kf(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Alors

$$f(x) = f(0)e^{kx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} [e^{-kx}f(x)]' &= e^{-kx}f'(x) - ke^{-kx}f(x) \\ &= e^{-kx}\{f'(x) - kf(x)\} = 0 \end{aligned}$$

D'où

$$e^{-kx}f(x) = \text{constante} = f(0)$$



13

Exemple en biologie:

$y(t)$ = taille d'une population bactérienne au temps t

$$\frac{d}{dt}y(t) = ky(t)$$



$$y(t) = y(0)e^{kt} \quad (t \geq 0)$$

Exemple en physique: radioactivité

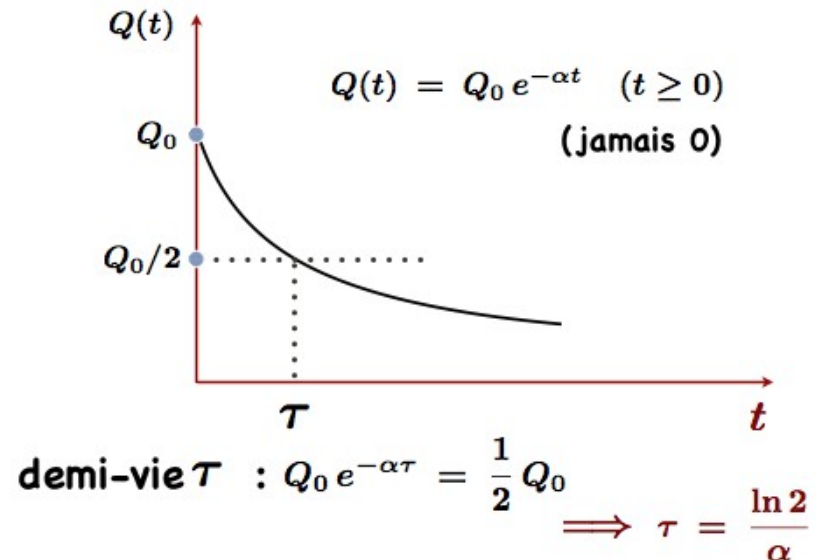
$Q(t)$ = quantité d'un élément radioactif au temps t

$$\frac{d}{dt}Q(t) = -\alpha Q(t)$$



$$Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0)$$

15



La vie est éternelle, mais la demi-vie est bien limitée

14

16

On a prouvé : **Proposition.** Soit f une fonction dérivable qui satisfait $f'(x) = kf(x)$ ($x \in \mathbb{R}$). Alors $f(x) = f(0)e^{kx}$ ($x \in \mathbb{R}$).

De façon plus générale :

Théorème.

Soient g et h continues. La solution $y(\cdot)$ de l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre un

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$$

qui satisfait la condition initiale $y(a) = A$ est donnée par

$$y(x) = e^{-\int_a^x g(s) ds} \left\{ A + \int_a^x h(t) e^{\int_a^t g(s) ds} dt \right\}$$

Rq : On a donc unicité de la solution dès qu'une valeur $y(a)$ est prescrite

Théorème. Soient g et h continues. La solution $y(\cdot)$ de l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre un

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$$

qui satisfait $y(a) = A$ est donnée par

$$y(x) = e^{-\int_a^x g(s) ds} \left\{ A + \int_a^x h(t) e^{\int_a^t g(s) ds} dt \right\}$$

Démonstration. On écrit $y'(t) + g(t)y(t) = h(t)$ et ensuite

$$e^{\int_a^t g(s) ds} \times [y'(t) + g(t)y(t)] = h(t) e^{\int_a^t g(s) ds}.$$

On reconnaît le côté gauche comme étant $\frac{d}{dt} \left\{ e^{\int_a^t g(s) ds} \times y(t) \right\}$.

Alors on intègre les deux côtés de a à x et on obtient

$$e^{\int_a^x g(s) ds} \times y(t) \Big|_a^x = \int_a^x h(t) e^{\int_a^t g(s) ds} dt.$$

À gauche on trouve $e^{\int_a^x g(s) ds} \times y(x) - A$.

Il suffit maintenant de traduire le terme A à droite dans la dernière équation et de multiplier les deux côtés par le terme

$e^{-\int_a^x g(s) ds}$ afin d'obtenir la formule.

Moralité : on peut toujours résoudre une équation différentielle **linéaire d'ordre un** (quitte à pouvoir intégrer certaines fonctions, et par la technique ci-dessus)

Rq : Les équadiffs linéaires $y' + g(x)y = h(x)$ et les équadiffs séparables $y' = g(x)h(y)$ sont *différentes* en général.

- Celle du réservoir, $y' = -k\sqrt{y}$, n'est pas linéaire.
- L'exemple qui suit est linéaire mais pas séparable.

Exemple. Résoudre $y' + y = e^x$.

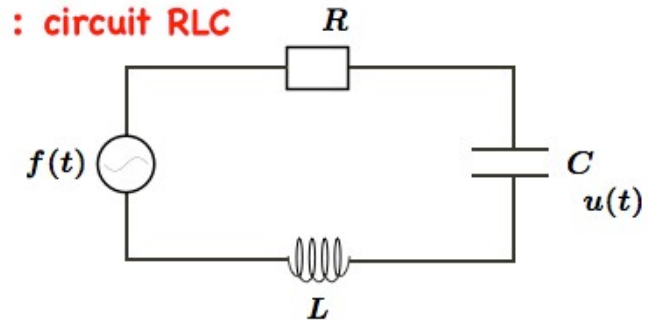
$$\begin{aligned} e^x \times (y' + y) &= e^x \times e^x \implies (e^x y)' = e^{2x} \\ \implies e^x y &= \frac{1}{2} e^{2x} + C \implies y(x) = \frac{1}{2} e^x + C e^{-x} \end{aligned}$$

Rq : Dans le cas linéaire, l'existence de la solution est **globale**, dès que g et h sont continues.

Le manque d'une condition initiale dans l'exemple explique la présence du C arbitraire dans la solution (dite **solution générale**)

Rq : La fonction exp figure aussi dans les équadiff d'ordre deux...

Exemple : circuit RLC



$$L u'' + R u' + \frac{1}{C} u = \frac{1}{C} f(t)$$

Etude de la croissance

Croissance comparée (aux polynômes):

Celle de $\ln$ est **faible**, celle de $\exp$ est **forte** (ou prévaut)

21

Proposition. Soit $r > 0$. Alors

$$\lim_{x \downarrow 0} x^r = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = +\infty.$$

Ces affirmations suivent directement des propriétés connues de $\ln$ et $\exp$, sachant que

$$x^r = e^{r \ln x}.$$

22

23

Théorème. Soit $r > 0$. Alors (limites indéterminées)

$$\lim_{x \downarrow 0} x^r \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x / x^r = 0.$$

On prouve dans un premier temps que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x / x = 0.$$

D'après la définition de $\ln x$, on a, pour $x > 1$:

$$0 < \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{x} \int_1^x \frac{1}{t^{1/2}} dt,$$

puisque $t^{1/2} \leq t$. Le dernier terme est égal à

$$\frac{1}{x} 2 t^{1/2} \Big|_1^x = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x},$$

qui converge vers 0; d'où la conclusion (deux gendarmes).

24

Maintenant on écrit

$$\frac{\ln x}{x^r} = \frac{1}{r} \frac{\ln x^r}{x^r},$$

ce qui implique, par le résultat ci-dessus, que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x / x^r = 0$$

(car $x^r \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$).

Théorème. Soit $r > 0$. Alors

$$\lim_{x \downarrow 0} x^r \ln x = 0, \quad \overbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x / x^r = 0}^{\text{fait}}$$

$$= - \lim_{y \downarrow 0} y^r \ln y$$

(en posant $y = 1/x$)

25

Théorème. Soit $r > 0$. Alors

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^r e^t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t / t^r = +\infty.$$

Ces limites s'obtiennent directement de celles déjà prouvées pour $\ln$. Par exemple, pour $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t / t^r$, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{e^t}{t^r} &= \frac{e^{\ln x}}{(\ln x)^r} \quad (\text{où } t = \ln x \text{ et } x \rightarrow +\infty) \\ &= \frac{x}{(\ln x)^r} \quad (\text{puisque } \exp(\ln x) = x) \\ &= \frac{(x^{1/r})^r}{(\ln x)^r} = \left\{ \frac{(x^{1/r})}{\ln x} \right\}^r, \end{aligned}$$

qui tend vers $+\infty$ puisque $(\ln x)/x^{1/r}$ tend vers 0, d'après le résultat précédent.

27

Un exemple qui fait appel à la croissance comparée: déterminer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + x + 1) \ln x}{(x + 3)(x - 1)^2}$$

Rappel: On sait que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

lorsqu'il s'agit d'une fraction rationnelle *propre*, et que la limite est finie (pas forcément zéro) lorsque $\deg(P) = \deg(Q)$.

Rappel: on écrit

Par exemple, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 17x - 2}{2x^2 - 5x + 7} = \frac{3}{2}$$

$$\text{On a } \frac{(2x^2 + x + 1) \ln x}{(x + 3)(x - 1)^2} = \frac{(2x^3 + x^2 + x)}{(x + 3)(x - 1)^2} \times \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + x + 1) \ln x}{(x + 3)(x - 1)^2} = 0$$

26

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln x &= \frac{1}{x} \\ \ln(xy) &= \ln x + \ln y \\ \ln(x/y) &= \ln x - \ln y \\ \ln(x^r) &= r \ln x \\ \ln 1 &= 0, \quad \lim_{x \downarrow 0} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \downarrow 0} x^r \ln x &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x / x^r = 0. \quad (r > 0) \end{aligned}$$

Résumé

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x \\ \ln(e^t) &= t \\ (e^t)' &= e^t \\ e^0 &= 1, \quad \lim_{t \downarrow -\infty} e^t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^r e^t &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t / t^r = +\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^x &:= e^{x \ln \alpha} \quad (\alpha > 0; x \in \mathbb{R}) \\ \alpha^{x+y} &= \alpha^x \alpha^y \\ \alpha^{x-y} &= \alpha^x / \alpha^y \\ \alpha^{rs} &= (\alpha^r)^s \\ (\alpha^x)' &= \alpha^x \ln \alpha \end{aligned}$$

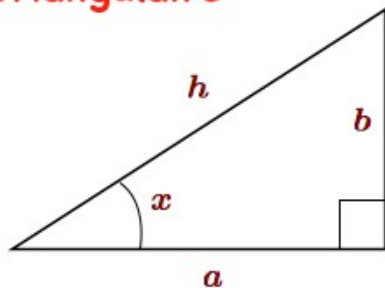
28

Les fonctions circulaires (trigonométriques)

Définir les fonctions trigonométriques : L'approche triangulaire

On se donne un angle x entre 0 et 90 degrés

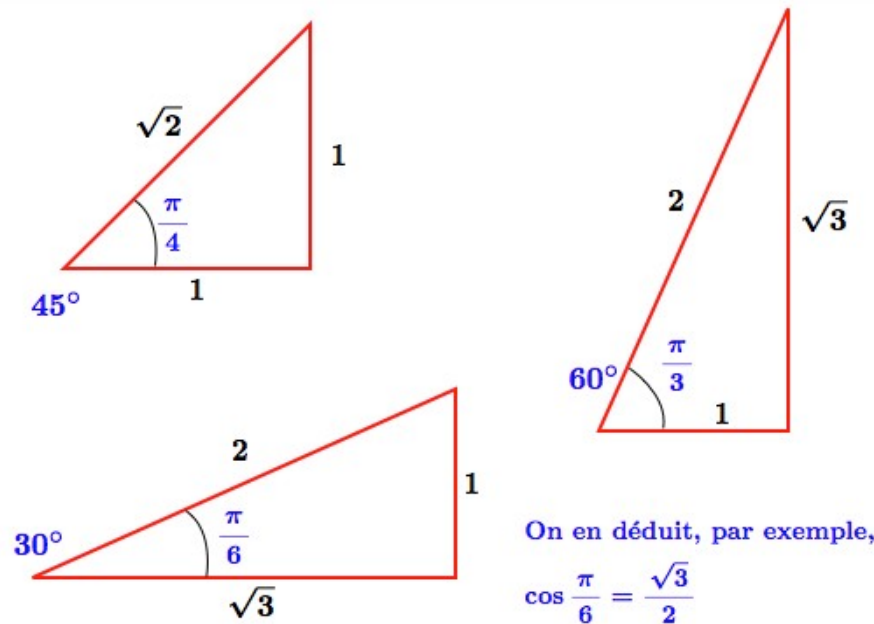
$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{a}{h} \\ \sin x &= \frac{b}{h} \\ \tan x &= \frac{b}{a}\end{aligned}$$



Pythagore $\Rightarrow$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

29



On en déduit, par exemple,
 $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

31

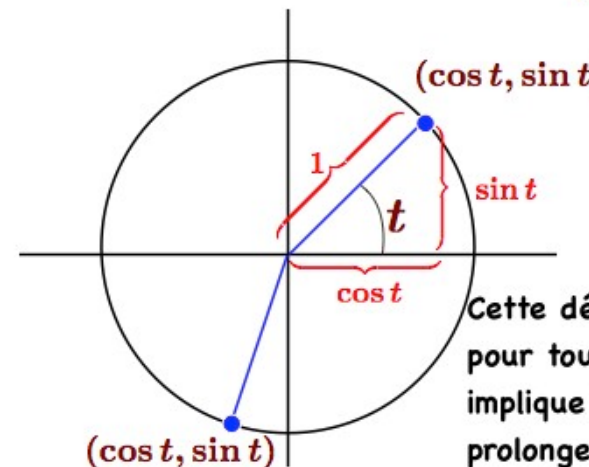
L'approche circulaire

Le cercle unité

$2\pi =$ sa circonférence

2π radians = 360°

(t en radians)



Cette définition est valable pour tout angle t , et implique la périodicité. Elle prolonge celle par triangles

30

32

Définition des fonctions trigonométrique (cosinus et sinus, ensuite tan)

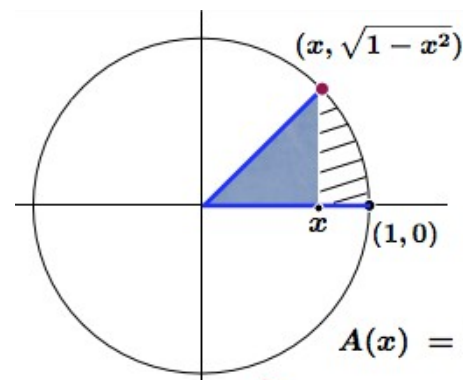
sans dessiner des triangles ou des cercles

Contrairement au cas ln/exp, on n'a pas d'expression simple pour la dérivée de sin (cos) ou vice-versa

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (x > 0)$$

Il s'agira quand-même d'utiliser l'intégration

33



Aire du secteur :

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

Le cercle unité

Il suit que $A : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, strictement décroissante, dérivable sur $] -1, 1[$, et qui satisfait

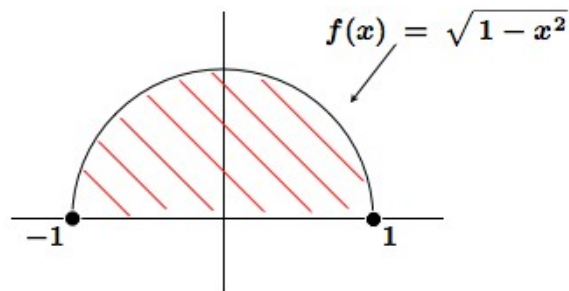
$$A(-1) = \pi/2, \quad A(1) = 0.$$

35

Définition. Le nombre π est définie comme suit:

$$\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Vue notre interprétation de l'intégrale comme étant l'aire sous une courbe, on voit que l'aire d'un demi-cercle de rayon 1 vaut $\pi/2$, d'après cette définition.

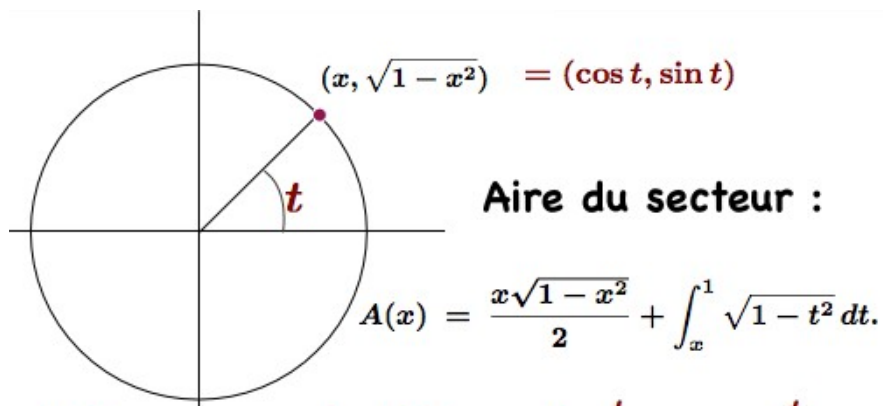


34

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{x}{2} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

36



L'aire correspondant à t serait $\frac{t}{2\pi} \times \pi = \frac{t}{2}$

On définit $\cos t$

par

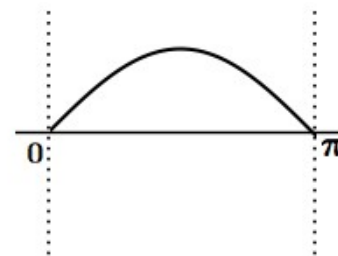
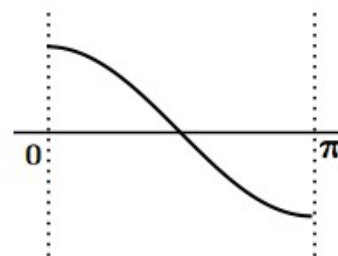
$$A(\cos t) = t/2 \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

(cos est la fonction réciproque de 2A)

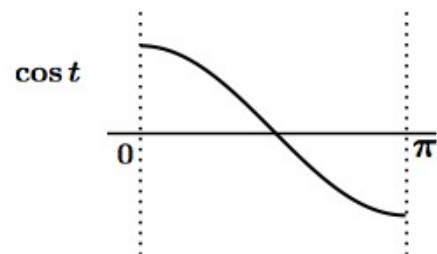
37

Ensuite on pose

$$\sin t := \sqrt{1 - (\cos t)^2} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$



39



$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

$$2A'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$[\cos t]' = \frac{1}{2A'(x)}$$

$$= \frac{1}{-1/\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}$$

(où $2A(x) = t$, c-à-d où $x = \cos t$)

$$= -\sqrt{1 - (\cos t)^2} = -\sin t$$

38

40

Donc

$$[\cos t]' = -\sin t$$

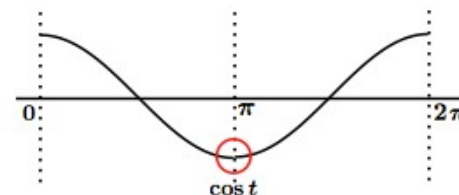
On trouve de façon similaire

$$[\sin t]' = \cos t$$

On vérifie assez aisément que ces deux prolongations conservent le caractère dérivable des fonctions concernées.

Par exemple, on montre (à l'aide du théorème des accroissements finis) que

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \pi} \frac{\cos t - \cos \pi}{t - \pi} &= \lim_{t \downarrow \pi} \frac{\cos t - \cos \pi}{t - \pi} \\ &= -\sin \pi = 0. \end{aligned}$$

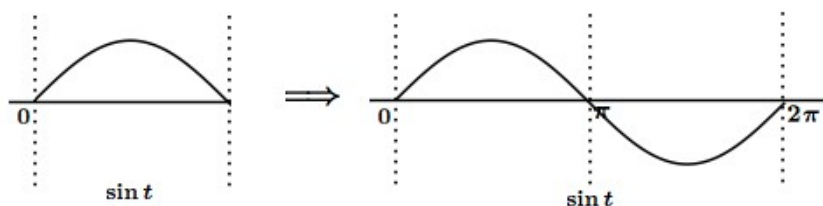
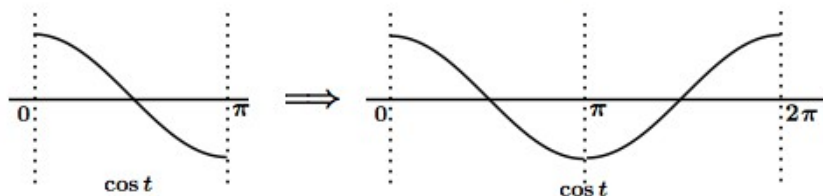


41

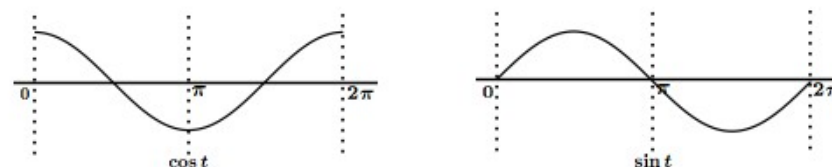
43

La prochaine étape consiste à prolonger les définitions de sinus et cosinus à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$:

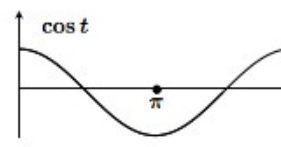
$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(2\pi - x), \\ \sin x &= -\sin(2\pi - x) \quad (x \in [\pi, 2\pi]). \end{aligned}$$



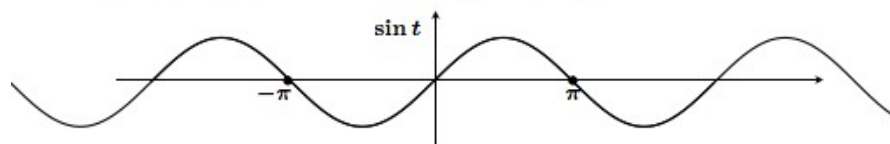
42



Enfin, on prolonge à la droite réelle par périodicité (2π) :

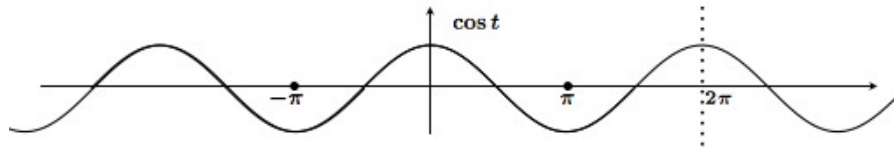


$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \forall x$$

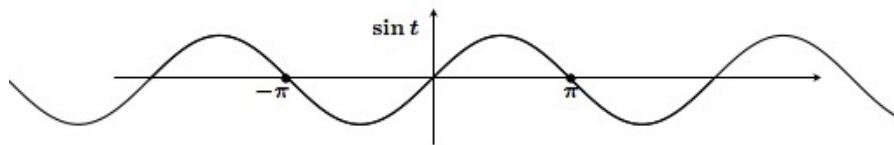


44

On a donné une définition rigoureuse de sinus et cosinus



$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \forall x$$



45

On a maintenant deux fonctions (sin et cos) définies sur la droite, de période 2π , à valeurs dans $[-1,1]$, telles que

$$\sin' x = \cos x, \cos'(x) = -\sin x \quad \forall x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x$$

$$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$$

Elles ont par conséquent des dérivées de tout ordre.

Mais comment établir des formules essentielles telles

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \quad ?$$

46

La clé consiste à montrer que sinus et cosinus sont solution de certaines équations différentielles

On calcule

$$\sin'' x = [\sin' x]' = [\cos x]' = -\sin x \quad \forall x$$

$$\text{d'où } \sin'' x + \sin x = 0 \quad \forall x$$

$$\text{En } 0, \text{ on a } \sin 0 = 0, \sin' 0 = 1$$

47

$$\begin{aligned} \sin'' x + \sin x &= 0 \quad \forall x \\ \sin 0 &= 0, \sin' 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos'' x + \cos x &= 0 \quad \forall x \\ \cos 0 &= 1, \cos' 0 = 0 \end{aligned}$$

Théorème. Soient α et β deux nombres donnés. Alors il existe **exactement une** fonction f sur la droite, deux fois dérivable, qui satisfait

$$L \sin(\cdot) = 0$$

$$(Lf) := f''(x) + f(x) = 0$$

$$L \cos(\cdot) = 0$$

$$f(0) = \alpha, f'(0) = \beta.$$

Cette fonction est la suivante:

$$f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x.$$

48

Lemme fondamental

Lemme. Soit g une fonction deux fois dérivable qui satisfait $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$ ainsi que

$$Lg = g''(x) + g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors g est identiquement 0.

Démonstration. Afin de prouver ce lemme, on multiplie l'équation $g'' + g = 0$ par $2g'(x)$. On obtient

$$2g'(x)g''(x) + 2g'(x)g(x) = 0 = [g'(x)^2 + g(x)^2]'$$

On en déduit que la fonction $x \mapsto g'(x)^2 + g(x)^2$ est constante. Mais puisqu'elle vaut 0 en $x = 0$, on a

$$g'(x)^2 + g(x)^2 = 0 \quad \forall x,$$

d'où g est identiquement zéro. 

49

Théorème. Soient α et β deux nombres donnés. Alors il existe **exactement une** fonction f sur la droite, deux fois dérivable, qui satisfait

$$\begin{aligned} Lf &:= f''(x) + f(x) = 0 \\ f(0) &= \alpha, \quad f'(0) = \beta. \end{aligned}$$

Cette fonction est la suivante:

$$f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x.$$

50

Démonstration (suite et fin). Soit g la fonction

$$g(x) := f(x) - \alpha \cos x - \beta \sin x.$$

L étant un opérateur linéaire, on a

$$\begin{aligned} Lg &= L(f - \alpha \cos - \beta \sin) \\ &= Lf - \alpha L \cos - \beta L \sin \\ &= 0 - 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$g(0) = f(0) - \alpha \cos 0 - \beta \sin 0 = 0,$$

et de même $g'(0) = 0$. On invoque le lemme afin de déduire que g est identiquement zéro; c-à-d,

$$f(x) \equiv \alpha \cos x + \beta \sin x. \quad \text{■}$$

51

Théorème (formules d'addition) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y. \end{aligned}$$

Démonstration. Nous prouvons la première identité. On fixe y , et on définit

$$g(x) := \sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Alors il suit facilement que g satisfait

$$Lg = g''(x) + g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ainsi que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$. Le lemme fondamental implique que g est identiquement zéro, d'où le théorème.

(une preuve sans dessins !) 

52

Les formules d'addition

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.\end{aligned}$$

Corollaire (formules de duplication)

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x\end{aligned}$$

Démonstration. On obtient la première identité en posant $y = x$ dans la formule d'addition du sinus.

Pour la seconde, on pose $y = x$ dans la formule d'addition du cosinus, et on utilise ensuite la formule circulaire $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. ■

53

Remarque On prouve de façon pareille certaines autres formules utiles telles que

$$\begin{aligned}\sin(x+\pi) &= -\sin x \\ \cos(x+\pi) &= -\cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \quad (\text{sinus est impaire}) \\ \cos(-x) &= \cos x \quad (\text{cosinus est paire})\end{aligned}$$

On retient

$$\begin{aligned}\cos 0 &= 1, \sin 0 = 0 \\ \cos \pi/2 &= 0, \sin \pi/2 = 1 \\ \cos \pi &= -1, \sin \pi = 0.\end{aligned}$$

55

Les formules d'addition

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.\end{aligned}$$

Corollaire (formules complémentaires)

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos(\pi/2 - x) \\ \cos x &= \sin(\pi/2 - x)\end{aligned}$$

Démonstration. Prouvons la première identité. On pose $x = \pi/2$ et $y = -x$ dans la formule d'addition du cosinus. On obtient

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2 - x) &= \cos(\pi/2) \cos(-x) - \sin(\pi/2) \sin(-x) \\ &= 0 \times \cos(-x) - 1 \times \sin(-x) \\ &= \sin x.\end{aligned}$$
■

54

Exemple Trouver

$$\int \cos^2 x \, dx$$

On sait que

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x \cos x + C\end{aligned}$$

confirmer !

Les formules de duplication

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x\end{aligned}$$

La formule circulaire

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Les dérivées

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$$

56

Exemple Déterminer $\int \frac{x dx}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$

Le changement de variable $x = \sin \theta$ se suggère...

$$I = \int \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \int \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{1 + \cos \theta} \quad dx = \cos \theta d\theta$$

Maintenant le changement de variable

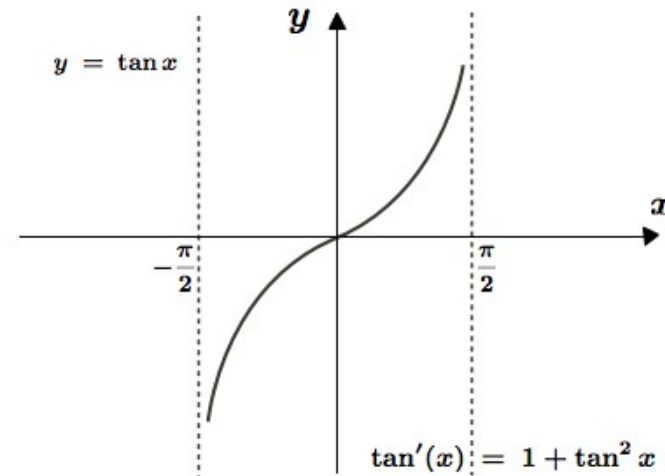
$u = \cos \theta$ est naturel... $du = -\sin \theta d\theta$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \int \frac{-u du}{1 + u} \\ &= \int \frac{(-u - 1 + 1) du}{1 + u} = - \int du + \int \frac{du}{1 + u} \\ &= -u + \ln(1 + u) + C \\ &= -\cos \theta + \ln(1 + \cos \theta) + C \\ &= -\sqrt{1 - x^2} + \ln(1 + \sqrt{1 - x^2}) + C \quad (\text{On vérifie !}) \end{aligned}$$

57

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

$\Rightarrow$ **tan est périodique, de période π**



59

La fonction tangente. La fonction $\tan$ est définie comme suit:

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

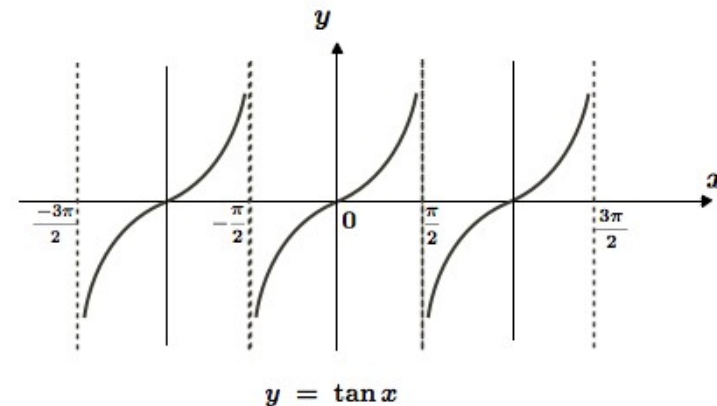
Evidemment, le domaine de $\tan$ ne contient pas les points x où $\cos x = 0$, c'est-à-dire,

$$x = \pi/2 \pm n\pi \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A partir des propriétés connues de sinus et cosinus, on déduit facilement les propriétés de la tangente, notamment

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x.$$

58



60

Exemple Déterminer $\int \frac{\sqrt{x^2+1} dx}{x^4}$ $\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

Le changement de variable $x = \tan \theta$ se suggère...

$$dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

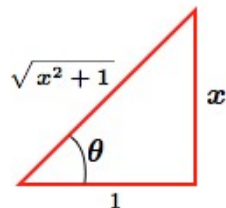
$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+1} dx}{x^4}$$

$$= \int \frac{\sqrt{\tan^2 \theta + 1} d\theta}{\tan^4 \theta \cos^2 \theta}$$

$$= \int \frac{d\theta}{\tan^4 \theta \cos^3 \theta} = \int \frac{\cos^4 \theta d\theta}{\sin^4 \theta \cos^3 \theta}$$

$$= \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin^4 \theta} = -\frac{1}{3} \sin^{-3} \theta + C$$

$$= -\frac{1}{3} \left[\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \right]^3 + C \quad (\text{car } \sin \theta = x/\sqrt{x^2+1})$$



sin/cos/tan : Résumé 2

Les formules d'addition

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Les formules complémentaires

$$\sin x = \cos(\pi/2 - x)$$

$$\cos x = \sin(\pi/2 - x)$$

Les formules de duplication

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

La formule circulaire : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

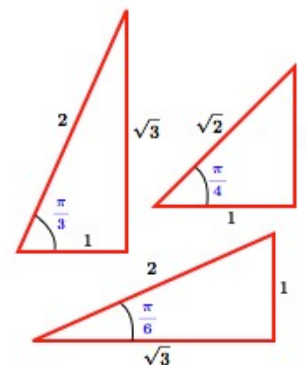
Dérivées:

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

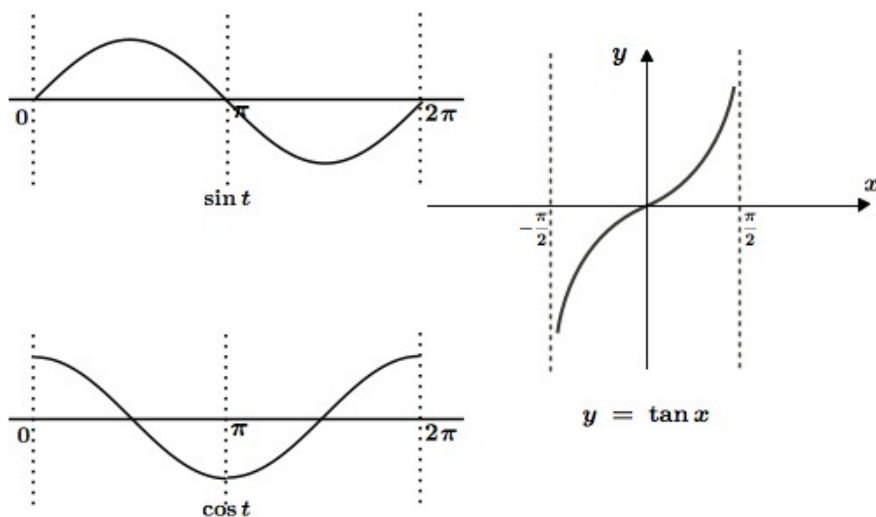
$$= 1 + \tan^2 x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$



sin/cos/tan : Résumé 1



KH 3

Math Analyse II (séq 4) printemps 2016

Cours de Francis Clarke

Khôlle 3 (15 min)

1. Calculer les quatre primitives suivantes :

(a) $\int e^{7x} dx$ (b) $\int e^x e^{2x} dx$ (c) $\int x^\pi dx$ (d) $\int \sqrt{e^x} dx$

2. Trouver $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$ en utilisant le changement de variable $u = e^x + 1$.

65

1. Calculer les quatre primitives suivantes :

**KH 3
corrigé**

(a) $\int e^{7x} dx = e^{7x}/7 + C$

(b) $\int e^x e^{2x} dx = \int e^{3x} dx = e^{3x}/3 + C$

(c) $\int x^\pi dx = x^{\pi+1}/(\pi+1) + C$

(d) $\int \sqrt{e^x} dx = \int (e^x)^{1/2} dx = \int e^{x/2} dx = 2e^{x/2} + C$

66

2. Trouver $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$ en utilisant le changement de variable $u = e^x + 1$.

$u = e^x + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$, et l'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{e^x+1} \frac{du}{e^x} &= \int \frac{e^x}{e^x+1} du = \int \frac{u-1}{u} du \\ &= \int (1 - 1/u) du = \int 1 du - \int \frac{1}{u} du \\ &= u - \ln u + C \quad (\text{ou } |u|, \text{ mais ici } u > 0) \\ &= e^x + 1 - \ln(e^x + 1) + C \\ &= e^x - \ln(e^x + 1) + C \quad (\text{en redéfinissant le } C). \end{aligned}$$

**KH 3
corrigé**

67



68