Analyse II : Intégration et approximation

MAT1009L / séquence 4 / printemps 2016

cours de Francis Clarke

CM11 :

1. Rappel sur les DL, quelques exemples
2. Le théorème de Lagrange
3. La vie de Euler : suite et fin
4. KH7

Calculer le DL en 0 à l'ordre 4 de la fonction $(1+x)^{\sin x}$

On écrit

$$f(x) = (1+x)^{\sin x} = e^{\ln\left((1+x)^{\sin x}\right)} = e^{(\sin x)\ln(1+x)}.$$

On calcule le DL à l'ordre 4 de $(\sin x)\ln(1+x)$.

$$(\sin x)\ln(1+x) =$$

$$\left[\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\right]_{\text{tronqué}} + o(x^4) = x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{6}x^4 + o(x^4).$$

On sait que

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

Par le théorème sur la composée, on déduit

$$f(x) = 1 + X + \tfrac{1}{2}X^2 + \tfrac{1}{6}X^3 + \tfrac{1}{24}X^4 + o(x^4)$$

$$(\text{où } X = x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{6}x^4)$$

$$= 1 + X + \tfrac{1}{2}X^2 + o(x^4)$$

$$= 1 + \left[x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{6}x^4\right] + \tfrac{1}{2}\left[x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{6}x^4\right]^2 + o(x^4)$$

$$= 1 + x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

Prouver que la limite suivante existe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$$

et déterminer sa valeur.

$$e^{\frac{1}{x+1}} = 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \frac{2x^2+4x+1}{2x^2(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} = \frac{2x^2+4x+1}{2x^2(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$\implies x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) =$$

$$\frac{2x^2+4x+1}{2(x+1)^2} + x^2 o\left(\frac{1}{x^2}\right) - x^2 o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$\to 1 + 0 + 0 = \boxed{1} \quad (\text{lorsque } x \to +\infty)$$

$$\frac{2x^2+4x+1}{2(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+1}{2x^2+4x+2} = \frac{2+4/x+1/x^2}{2+4/x+2/x^2} \to \frac{2}{2} = 1$$

$$x^2\, o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)}{\frac{1}{(x+1)^2}} \times \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)}{\frac{1}{(x+1)^2}} \times \frac{x^2}{(x+1)^2}$$

$$\to 0 \times 1 = 0 \quad \text{lorsque } x \to +\infty$$

$$x^2\, o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\to 0 \quad \text{lorsque } x \to +\infty$$

La dernière grande idée du cours:

approximation d'une fonction f
par des polynômes

A ce point, on n'a fait que des approximations asymptotiques (c-à-d, qui sont vérifiées à la limite) ; autrement dit, on a regardé la partie polynomiale du DL

On étudie maintenant la question de calculer les valeurs d'une fonction (à partir d'un DL en un point où la valeur est connue)

$$f(x) \;=\; P_n(x) + R_n(x)$$

Pour cela, il faut
l'estimation du reste
(dernier volet)

Exemple. Calculer $\ln 2$.

En exploitant la valeur
connue de $\ln 1$, on a pu trouver le DL

$$\ln(1+x) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

En posant $x = 1$ on obtient

$$\ln 2 \;=\; 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + o(1) \;=\; \tfrac{5}{6} + o(1).$$

On en déduit quoi concernant $\ln 2$?

Puisque ln admet des dérivées de tout ordre, on peut écrire, pour tout entier n :

$$\ln(1+x) \;=\; P_n(x) + R_n(x).$$

Lorsqu'on sait que $R_n(x) \to 0$, on a une façon de calculer $\ln(1+x)$ à toute précision voulue, en prenant n suffisamment grand.

Ici, la forme du DL nous suggère que cette approche sera utile pour $|x| < 1$:

On cherche à estimer le reste

$$\ln(1+x) \;=$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

On regarde la dérivée de la fonction

On observe l'identité

$$1 = (1-t)(1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n)+t^{n+1}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

$$\Longrightarrow \quad -\ln(1-x) = \int_0^x \left\{1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\frac{t^{n+1}}{1-t}\right\} dt$$

$$= x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,dt$$

$$\boxed{-\ln(1-x) = \underbrace{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{Q_{n+1}(x)}+\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,dt}$$

Si $|x|\leqslant \frac{1}{2}$, on peut estimer ainsi le dernier terme :

$$\left|\frac{t^{n+1}}{1-t}\right| \leq \frac{(1/2)^{n+1}}{1/2} \Longrightarrow$$

$$\left|\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,dt\right| \leq |x|\frac{(1/2)^{n+1}}{1/2} \leq (1/2)^{n+1}$$

Conclusion (en remplaçant $n+1$ par n) : pour $|x|\leqslant\frac{1}{2}$, on a

$$-\ln(1-x) = Q_n(x)+R_n(x) \quad \text{où } |R_n(x)|\leqslant 2^{-n}$$

Pour $|x|\leqslant \frac{1}{2}$, on a

$$\boxed{-\ln(1-x) = Q_n(x)+R_n(x) \quad \text{où } |R_n(x)|\leqslant 2^{-n}}$$

$$\Longrightarrow \quad |-\ln(1-x)-Q_n(x)|\leqslant 2^{-n}$$

Posons $x=1/2$.

On obtient alors (puisque $-\ln(1/2)=\ln 2$) :

$$\left|\ln(2)-\left\{\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\cdots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}\right\}\right| \leq 2^{-n}$$

On peut ainsi calculer $\ln 2$ à la précision voulue, quitte à prendre n assez grand.

Par exemple, pour avoir |erreur| $\leq \frac{1}{100}$, il suffit de prendre n tel que

$$2^{-n} < \frac{1}{100} \iff 2^n > 100 \iff n > 6$$

rappel

exemple Calculer le DL en 0 et d'ordre 5 de la fonction
$$x\mapsto f(x) := \ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$$f(x) = 2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right\}+o(x^5)$$

Euler introduit ce DL pour calculer ln 2 en posant x = 1/3 ... on obtient une convergence plus rapide ....

Regardons arctan.

On a vu que

$$\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

d'où

$$\frac{1}{1+u^2} = 1-u^2+u^4-u^6+\cdots\pm u^{2n}\pm\frac{u^{2n+2}}{1+u^2}.$$

$$\Longrightarrow \arctan x = \int_0^x [\arctan u]'\,du = \int_0^x \frac{du}{1+u^2}$$

$$= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\int_0^x \frac{u^{10}}{1+u^2}\,du$$

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\underbrace{\int_0^x \frac{u^{10}}{1+u^2}\,du}_{\text{estimer?}}$$

Proposition. Soit $0 \leqslant x \leqslant 1/2$. Alors

$$0 \le \int_0^x \frac{u^{10}}{1+u^2}\,du \le \frac{1}{11\times 2^{11}}.$$

Démonstration.

$$\int_0^x \frac{u^{10}}{1+u^2}\,du \le \int_0^x u^{10}\,du \le \int_0^{\frac{1}{2}} u^{10}\,du = \frac{u^{11}}{11}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{11\times 2^{11}}.$$

∎

Conclusion. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1/2$, on a

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+R,$$

où le reste R satisfait $-1/(11\times 2^{11}) < R \leqslant 0$.

On a $2^{11}=2048$, d'où $\dfrac{1}{11\times 2^{11}} < \dfrac{1}{20000} = 0,5\times 10^{-4}$.

Il s'ensuit que (à $0,5\times 10^{-4}$ près)

$$\arctan\tfrac{1}{2} \approx \tfrac{1}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9}{9}$$
$$= 0,46368\ldots$$

On peut affirmer $0,46363 < \arctan\frac{1}{2} < 0,46369$.

De même, on trouve $0,32174 < \arctan\frac{1}{3} < 0,32180$.

Proposition. Soient x et y des nombres positifs tels que $xy < 1$. Alors

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}.$$

Démonstration. On peut supposer $y \neq 0$, en fait $y > 0$. En fixant ensuite y, il suffit alors d'établir l'identité pour x dans l'intervalle $[0, 1/y[$.

L'identité est vrai pour $x=0$; par conséquent, il suffit de vérifier que les deux côtés de la prétendue identité (qui définissent des fonctions dérivables de l'argument x) ont les mêmes dérivées par rapport à x. A gauche, cette dérivée est $1/(1+x^2)$. A droite, on calcul:

$$\left[\arctan\frac{x+y}{1-xy}\right]' = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\,\frac{(1)(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}$$
$$= \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} = \frac{1+y^2}{(1+y^2)(1+x^2)}$$
$$= \frac{1}{(1+x^2)}.$$

∎

Lorsque l'on prend $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$, on trouve

$$\frac{x+y}{1-xy} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = 1.$$

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

Puisque $\arctan 1 =$? , on obtient

$$\boxed{\textbf{Corollaire.}\ \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}}$$

rappel
$$\begin{cases} 0,46363 < \arctan\frac{1}{2} < 0,46369. \\ 0,32174 < \arctan\frac{1}{3} < 0,32180. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ 0,78537 < \frac{\pi}{4} < 0,78549$$

$$\Longrightarrow\ 3,14148 < \pi < 3,14196$$

d'où $\pi = 3,141\ldots$

Ces deux exemples (ln et arctan) ont exploité l'identité

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

Une telle approche algébrique est rarement disponible ; l'analyse était ad hoc (= adéquat, qui convient, pour cette fin)

On ne savait rien de général sur le reste, avant un progrès spectaculaire, une caractérisation générale du reste obtenue par Monsieur X en 1797

Monsieur X

Joseph Louis Lagrange

1736-1813

Théorie des Fonctions analytiques : contenant les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute Considération d'infiniment Petits, d'Evanouissans, de Limites et de Fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des Quantités finies (1797)

Théorème (du reste de Lagrange)
Soit f une fonction $(n+1)$-fois dérivable dans un intervalle ouvert comprenant $[a, b]$. Alors il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que

$$\begin{aligned} f(b) &= P_{n,a,f}(b) + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}} \quad R_n\ !! \\ &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Rq : Notons que si $c = a$, alors l'expression à droite coïncide avec $P_{n+1,f,a}(b)$.

Pour $n = 0$, le théorème devient le très familier théorème des accroissements finis (sous des hypothèses légèrement plus fortes) :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Autrement dit :

$$R_n(b) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1} \quad \text{où } a < c < b$$

R_n est le reste à l'ordre $n+1$

Démonstration. On pose

$$G(x) \;=\; f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}\,(b-x)^2 \dots \\ - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,(b-x)^n - \frac{K}{(n+1)!}\,(b-x)^{n+1},$$

où le nombre K est choisi pour avoir $G(a) = 0$ (ce qui est évidemment possible). Alors $G(b) = 0$ aussi. Il résulte de nos hypothèses que G est continue sur $[\,a, b\,]$ et dérivable dans l'intérieur de cet intervalle. On calcul aisément $G'(x)$ par la règle pour la dérivée d'un produit, et l'on trouve que presque tous les termes s'annulent:

$$G'(x) \;=\; \frac{(b-x)^n}{n!}\left\{-f^{(n+1)}(x) + K\right\}.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $G'(c) = 0$, c'est-à-dire, $K = f^{(n+1)}(c)$. En substituant ceci dans la relation $G(a) = 0$, on trouve la conclusion du théorème. ∎

Dans le livre de Lagrange, on trouve, par exemple :

$$f(y) \;=\; f(x) + f'(z)(y-x) \quad (\text{où } z \in \,]x, y\,[\,)$$

théorème des accroissements finis

Mean value theorem (pays anglo-saxon)

théorème de Lagrange (Russie)

Dans le livre de Lagrange, on trouve, par exemple :

$$f(y) \;=\; f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}\,f''(z)(y-x)^2$$

Développement de Taylor (-Lagrange)

Taylor expansion (pays anglo-saxon)

théorème de Lagrange (Russie)

(Taylor-) Lagrange $\quad f(b) = P_{n,a,f}(b) + \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

en 0 $\quad f(x) = P_n(x) + \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (\text{où } |c| < |x|)$

Taylor-Young

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

ponctuel

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

La première formule implique la seconde (mais exige une dérivée de plus).

Le théorème de Lagrange *quantifie* la différence (le reste) entre f et son polynôme de Taylor (pas d'évanouissan).

Ce théorème sert notamment à calculer des valeurs explicites des fonctions élémentaires (avec les DL)

Euler trouve

$$e \approx 2{,}718281828459045235360 28$$

Peut-on vérifier son calcul?

On a

$f(b) = P_{n,a,f}(b) + \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

$$e^x = P_n(x) + R_n(x) \qquad \text{Posons } x = 1$$

$$\Longrightarrow e = 1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \cdots + \tfrac{1}{n!} + R_n(1)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \cdots + \tfrac{1}{n!} + \quad ?$$

Par conséquent, pour trouver une estimation de e à la tolérance (erreur) τ désirée, il suffit de sommer les réciproques des factoriels jusqu'à n, où n est assez grand pour que

$$\frac{e^1}{(n+1)!} < \tau\,.$$

Cela garantira $|e - P_n(1)| < \tau$.

Pour $\tau = 10^{-23}$, puisque $2 < e < 4$, il suffira de prendre

$$\frac{4}{(n+1)!} < 10^{-23} \iff (n+1)! > 4\times 10^{23} \iff n > 24$$

$$e \approx 2{,}718281828459045235360 28$$

$$f(b) = P_{n,a,f}(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Exemple. Calculer $\sin(\frac{1}{3})$ avec précision $1{,}0 \times 10^{-4}$.

On a, d'après le théorème de Lagrange:

$$\sin(\tfrac{1}{3}) = P_4(\tfrac{1}{3}) + R_4(\tfrac{1}{3}) = \frac{1}{3} - \frac{(\frac{1}{3})^3}{6} + \frac{(\sin)^{(5)}(c)}{5!}\left(\frac{1}{3}\right)^5,$$

Puisque sinus et ses dérivées sont bornées par 1 en valeur absolue, il suit facilement que le reste

$$R_4(\tfrac{1}{3}) = \frac{(\sin)^{(5)}(c)}{5!}\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

est majoré (en valeur absolue) par

$$\frac{1}{3^5 \times 5!} = \frac{1}{29160} < \frac{1}{10^4}.$$

On peut affirmer $\sin(\frac{1}{3}) = 0{,}327$

D'où la réponse:

$$\sin(\tfrac{1}{3}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6 \times 27} = \frac{53}{162} = 0,32716\ldots$$

l'erreur étant garantie inférieure à $1{,}0 \times 10^{-4}$.

$$R_4(\tfrac{1}{3}) = \frac{(\sin)^{(5)}(c)}{5!}\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

Par contre, on peut faire mieux (au besoin), en regardant de plus près le reste. Puisque $\sin^{(5)}(x) = \cos x$, et puisque c est entre 0 et $1/3$, on a en fait

$$0 < R_4(\tfrac{1}{3}) < \frac{1}{3^5 \times 5!} = 3{,}42\cdots \times 10^{-5}$$

d'où

$$\begin{aligned} 0,32716 < \sin(\tfrac{1}{3}) &< 0,32716\cdots + 0,0000342\ldots \\ &< 0,32717 + 0,00004 = 0,32721. \end{aligned}$$

La moyenne des deux bornes est $0,327185$; on peut donc affirmer que $\sin(\frac{1}{3}) \approx 0{,}327185$, l'erreur ne dépassant pas

$$(0{,}32721 - 0{,}32716)/2 = 0,000025 = 2{,}5 \times 10^{-5}.$$

Si

$$c < y < d,$$

alors on a

$$\left| y - \frac{c+d}{2} \right| < \frac{d-c}{2}$$

Pour calculer $f(b)$, la stratégie serait d'utiliser un DL en un point a tel que les $f^{(k)}(a)$ soient disponibles. (En général, on préfère que a soit proche de b.)

Alors on a (lorsque f est suffisamment dérivable, par Monsieur X)

$$\begin{aligned} f(b) &= P_{n,a,f}(b) + R_n(b) \\ &= P_{n,a,f}(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \end{aligned}$$

et l'idée est que $P_{n,a,f}(b)$ (facile à calculer) sera une bonne approximation de $f(b)$, du moins quand n est suffisamment grand.

Afin que cette stratégie aboutisse, il faudra que le reste d'ordre $n+1$ (le terme $R_n(b)$) soit assez petit. C'est souvent (mais pas toujours) le cas... selon la valeur de b.

Calculer $\sqrt[3]{7}$, l'erreur étant inférieure à $1,0 \times 10^{-2}$.

$$\begin{aligned} f(b) &= P_{n,a,f}(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\ &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3},\ a = 8,\ b = 7$$

$$\Longrightarrow\ f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3},\ f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3}$$

$$\Longrightarrow\ f(a) = 2,\ f'(8) = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}$$

(on espère que n=1 suffira)

Est-ce que $n = 1$ suffirait pour obtenir la précision voulue?

On a $f(7) = P_{1,8,f}(7) + R_1(7)$; il faudrait que le reste $R_1 = R_1(7)$ (qui est dit d'ordre deux) soit inférieur en valeur absolue à 10^{-2}.

La réponse serait alors

$$f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3}$$

$$f'(8) = \tfrac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} f(7) &\approx P_{1,8,f}(7) \\ &= f(8) + f'(8)(7-8) \\ &= 2 + \tfrac{1}{12} \times (-1) = \tfrac{23}{12} = \boxed{1,917} \quad \text{(arrondie)} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Lagrange, le reste $R_1 = R_1(7)$ d'ordre deux est donné par

$$\frac{f''(c)}{2!}(7-8)^2 = -\tfrac{1}{9}c^{-5/3} \quad (\text{où } 7 < c < 8)$$

$$\Longrightarrow |R_1| \le \frac{1}{9} \times 7^{-5/3} = \frac{1}{9} \times \frac{7^{1/3}}{7^2}$$

$$\le \frac{1}{9} \times \frac{8^{1/3}}{49} = \frac{2}{441} < 10^{-2}$$

Pour calculer $f(b)$, la stratégie serait d'utiliser un DL en un point a tel que les $f^{(k)}(a)$ soient disponibles.
(En général, on préfère que a soit proche de b.)

Alors on a (lorsque f est suffisamment dérivable, par Monsieur X)

$$\begin{aligned} f(b) &= P_{n,a,f}(b) + R_n(b) \\ &= P_{n,a,f}(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \end{aligned}$$

et l'idée est que $P_{n,a,f}(b)$ (facile à calculer) sera une bonne approximation de $f(b)$, du moins quand n est suffisamment grand.

Afin que cette stratégie aboutisse, il faudra que le reste d'ordre $n+1$ (le terme $R_n(b)$) soit assez petit. C'est souvent (mais pas toujours) le cas... selon la valeur de b.

Un cas où la stratégie marche toujours en principe:

calculer e^x en utilisant le DL en 0.

On a

$$\begin{aligned} e^x &= P_n(x) + R_n(x) \\ &= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \cdots + \tfrac{1}{n!}x^n + R_n(x) \\ &= P_n(x) + \frac{e^c}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} \end{aligned}$$

Il suit que $R_n(x)$ est majoré en valeur absolue par

$$\frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Il est clair que pour un x qui satisfait $|x| \leqslant 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0.$$

En fait ceci est vrai quelque soit le x (admis), mais la convergence sera plus lente.

Un autre cas où la stratégie marche toujours en principe:

calculer $\sin x$ en utilisant le DL en 0.

On a

$$\begin{aligned} \sin x &= P_{2n}(x) + R_{2n}(x) \\ &= x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^5 + \cdots \pm \tfrac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + R_{2n}(x) \\ &= P_{2n}(x) + \frac{\sin^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!}(x-0)^{2n+1} \end{aligned}$$

Il suit que $R_{2n}(x)$ est majoré en valeur absolue par

$$\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Il est clair que pour un x qui satisfait $|x| \leqslant 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0.$$

En fait ceci est vrai quel que soit le x (admis).

Un cas où le *domaine de convergence* est limité :

calculer $\ln(1+x)$ en utilisant le DL en 0.

Il a été prouvé que pour $x > 0$ on a

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= P_n(x) + R_n(x) \\ &= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots \pm \tfrac{1}{n}x^n \mp R_n(x) \\ &= P_n(x) \pm \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt\,. \end{aligned}$$

Si $0 < x < 1$, l'intégrale ci-dessus est majorée par $x \times x^n$, qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La stratégie d'approximation est validée pour de tels x.

Par contre, si $x > 1$ on montre (exercice) que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt = +\infty.$$

Il suit que le DL ne peut pas être utile pour le calcul de $\ln(1+x)$ lorsque $x > 1$.

Une fonction complètement infidèle à son DL

Tracer le graphe de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction est paire et positive. Elle est continue à l'origine, car

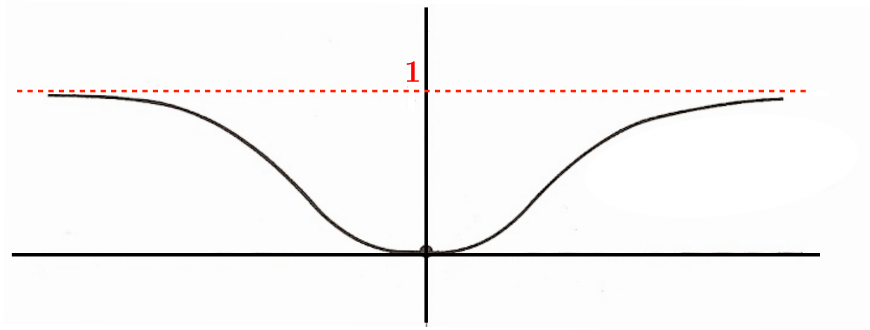
$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0.$$

Il suit que f admet un minimum global en $x = 0$.

Sa dérivée est $2x^{-3}e^{-1/x^2}$, qui est du même signe que x. Donc f est croissante pour $x > 0$ et décroissante pour $x < 0$.

La fonction admet une asymptote horizontale $y = 1$ commune en $+\infty$ et $-\infty$, car

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-1/x^2} = \lim_{x\to-\infty} e^{-1/x^2} = 1.$$



$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Il est clair que f admet des dérivées de tout ordre dans le domaine $x \neq 0$. Il s'avère qu'il en est de même en $x = 0$.

Proposition Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la dérivée $f^{(k)}(0)$ existe et vaut 0.

Démonstration (esquisse) Pour $k = 1$ il s'agit de prouver que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0.$$

C'est vrai parce que $\lim_{u\to\pm\infty} ue^{-u^2} = 0$ (croissance comparée).

Pour $k = 2$, il s'agit de prouver que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^{-3}e^{-1/x^2}}{x} = 0.$$

A nouveau, ceci découle de la croissance comparée.

Pour traiter $k > 2$, on utilise le lemme suivant.

Lemme Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_{3k}$ telles que

$$f^{(k)}(x) \;=\; e^{-1/x^2} \sum_{1}^{3k} \frac{a_i}{x^i} \qquad (x \neq 0)\,.$$

Pour conclure, on prouve premièrement le lemme (simple, par récurrence).

Enfin, le lemme nous permet de traiter le cas général par le même argument que pour $k = 1$ et $k = 2$ (étude directe du quotient différentiel + croissance comparée).

Proposition Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la dérivée $f^{(k)}(0)$ existe et vaut 0.

Il suit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme de Taylor $P_{n,0,f}$ est identiquement zéro.

Bien sûr, on a toujours, pour tout n, la relation

$$f(x) \;=\; P_{n,0,f}(x) + R_n(x)\,,$$

mais la fonction f coïncide avec le reste R_n !

Celui-ci ne dépend pas de n, en fait, et on voit que le DL est complètement inutile pour le calcul de $f(x)$.

Rq: Ce phénomène pathologique ne se produit pas avec les fonctions élémentaires, qui sont analytiques

Une application à la théorie des nombres

rappel:

Un nombre réel x est dit **rationnel** si on peut l'écrire dans la forme x = a/b
où a et b sont des entiers

Théorème. Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. On raisonne par l'absurde: on suppose que $\sqrt{2} = a/b$, où a et b sont des entiers positifs sans facteurs communs.

Alors

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\,b = a \;&\Longrightarrow\; 2b^2 = a^2 \\
&\Longrightarrow\; a^2 \text{ est divisible par } 2 \\
&\Longrightarrow\; a \text{ est divisible par } 2 \\
&\Longrightarrow\; a^2 \text{ est divisible par } 4 \\
&\Longrightarrow\; 2b^2 \text{ est divisible par } 4 \\
&\Longrightarrow\; b^2 \text{ est divisible par } 2 \\
&\Longrightarrow\; b \text{ est divisible par } 2
\end{aligned}$$

Contradiction! (Et a et b seraient divisibles par 2.)

Théorème. Le nombre e est irrationnel.

Démonstration. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)\\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n \text{ où}$$

$$0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}$$

On raisonne par l'absurde: on suppose que $e = a/b$, où a et b sont des entiers positifs.

$$\boxed{e = \frac{a}{b} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n}$$

Choisir un entier n tel que $n > 3$ et $n > b$. Alors

$$\frac{n!a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!R_n$$

Chaque terme dans cette équation est un entier, à part éventuellement le dernier. Mais alors $n!R_n$ est un entier aussi.

Mais

$$0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}$$

d'où

$$0 < n!R_n < \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1\,,$$

$\blacksquare$

difficile (voire impossible) pour un entier : contradiction!

Leonhard Euler

né le 15 avril (309 ans et 12 jours aujourd'hui)

1707-1783

Mot biographique de la fin

Euler

Maupertuis

Lagrange

Maupertuis

- Il se retire en disgrace en 1753 suite au

grand scandale

qui l'oppose à Voltaire et tous les parisiens

- Il est atteint de la tuberculose
- Il meurt en 1759, à l'age de 61 ans, à Bâle, dans la maison de Bernoulli

Ni rue à Paris, ni cratère sur la lune, Mais :

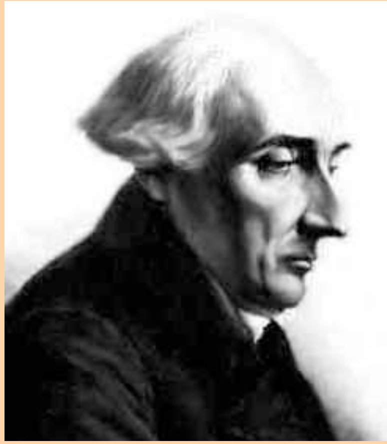
Certains parlent toujours du principe de moindre action de Maupertuis (!)

- Euler quitte enfin Berlin en 1766. Qui le remplace?
- Lagrange est nommé à Berlin, à l'age de trente ans

Frédéric, le *stupor mundi,* dit :

Le plus grand roi d'Europe veut à sa cour
le plus grand mathématicien d'Europe

- Euler et Lagrange : les plus grands mathématiciens du 18e



Lagrange

- Après 20 ans à Berlin, il rejoint l'académie de Paris en 1786
- Pendant la révolution : système métrique, Ecole Normale et Polytechnique
- Sous Napoléon : sénateur, comte de l'Empire, grand officier Légion d'honneur
- Son 'plus grand trésor' : sa jeune épouse, qu'il marie à l'âge de 56 ans
- Mort à Paris en 1813 à l'âge de 77 ans

- un grand homme, un génie, généreux et modeste
- *Euler a été le premier à citer les autres de façon équitable et positive* (Truesdell) *Un saint ?* OUI !

Mort en septembre 1783 à Saint-Pétersbourg, à 76 ans

R. I. P.

Euler

Dernier jour :

- le matin : des études sur les montgolfières (invention récente)
- l'après-midi : des calculs sur l'orbite d'Uranus (découverte récente)
- le soir : crise cérébrale, mort subite

Derniers mots : *je meurs*

KH 7 (15 minutes)

1.(a) Déterminer le développement limité d'ordre 4 autour de 0 de la fonction

$$g(x) = \frac{2x+1}{1+x^2+2x^3+x^4}.$$

(b) En déduire (facilement, en expliquant) le DL d'ordre 5 en 0 de la fonction $h(x) = \arctan(x^2+x)$.

2. Prouver que la limite suivante existe, et la calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(3x)-1)\ln\left(1+2x^2\right)}{\sin^4 x}.$$

KH 7 corrigé

1. (a) Déterminer le développement limité d'ordre 4 autour de 0 de la fonction $g(x) = \dfrac{2x+1}{1+x^2+2x^3+x^4}$.

On obtient, par division,
$g(x) = 1+2x-x^2-4x^3-4x^4+o(x^4)$.

$$\begin{array}{r|l} 1+2x & 1+x^2+2x^3+x^4 \\ \hline & 1+2x-x^2-4x^3-4x^4+o(x^4) \end{array}$$

(b) En déduire (facilement, en expliquant) le DL d'ordre 5 en 0 de la fonction $h(x) = \arctan(x^2+x)$.

On a $h' = g$ et $h(0) = 0 \implies h(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, d'où (par un résultat du cours pour le DL d'une intégrale) le DL d'ordre 5 de h est obtenu en intégrant le DL d'ordre 4 de g. On a alors

$$h(x) = \int_0^x \left(1+2t-t^2-4t^3-4t^4\right)dt + o(x^5) = x+x^2-\frac{x^3}{3}-x^4-\frac{4x^5}{5}+o(x^5).$$

2. Prouver que la limite suivante existe, et la calculer :

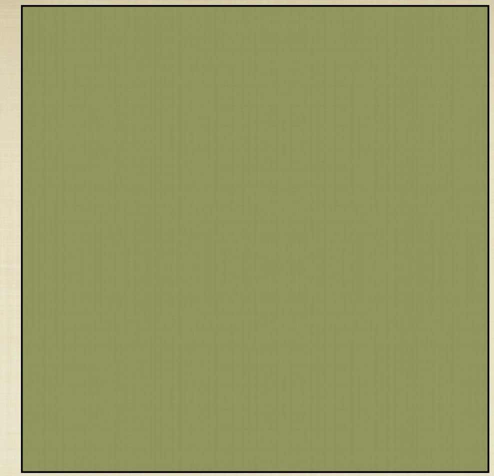
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(3x)-1)\ln\left(1+2x^2\right)}{\sin^4 x}.$$

La fonction concernée s'écrit

$$\frac{\left[-\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)\right]\times\left[2x^2+o(x^2)\right]}{\left[x+o(x^2)\right]^4}$$

$$= \frac{x^4\left[-\frac{9}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]\times\left[2+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]}{x^4\left[1+\frac{o(x^2)}{x}\right]^4}$$

$$\to \; -9$$



Fin du onzième cours