# Analyse II : Intégration et approximation

MAT1009L / séquence 4 / printemps 2016

cours de Francis Clarke

## CM10 :

1. Rappel : les développements limités
2. DL d'un quotient
3. DL de la dérivée et DL de l'intégrale
4. Application aux limites
5. Vie d'Euler (suite)
6. KH6



**La dernière grande idée du cours:**

**approximation d'une fonction f par des polynômes**

**Rappel:**



Soit $f$ une fonction $n$ fois dérivable en un point $a$.

Le *polynôme de Taylor* d'ordre $n$ de la fonction $f$ au point $a$ veut dire le polynôme suivant :

$$\boxed{P_{n,a,f}(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k .}$$

On a par exemple :

$$\begin{aligned} P_{4,0,f}(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &\qquad + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''''(0)}{24}x^4 \\ &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \end{aligned}$$



Lorsque que l'on a **terminologie**

$$f(x) \;=\; P_n(x) + o_a\big((x-a)^n\big),$$

où $P_n$ est un polynôme d'ordre $n$ ou moins, on dit que $f$ admet un *développement limité* d'ordre $n$ au point $a$.

Le polynôme $P_n$ en est la *partie polynomiale*.

Le terme $R_n := f - P_n$ est le *reste*. Donc on a

$$f(x) \;=\; P_n(x) + R_n(x)\,, \qquad \lim_{x\to a} \frac{o_a((x-a)^n)}{(x-a)^n} \;=\; 0$$

où le reste $R_n$ est négligeable devant $(x-a)^n$ au point $a$.

En conséquent, $P_n$ est *une approximation locale de $f$ en $a$ d'ordre $n$.*

## existence et unicité d'un développement limité d'ordre n

**Théorème (Formule de Taylor-Young)** Soit $f$ une fonction de classe $C^n$ dans un voisinage du point $a$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le polynôme de Taylor $P_n = P_{n,a,f}$ satisfait

$$f(x) = P_n(x) + o_a\big((x-a)^n\big),$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Le polynôme de Taylor $P_{n,a,f}$ est le seul polynôme de degré $n$ ou moins qui possède cette propriété.



## DL d'un polynôme

**Exemple**

Déterminer le DL d'ordre 3 en 0 de la fonction

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \\ &= (1 + x + x^2 + x^3) + x^4 \\ &= (1 + x + x^2 + x^3) + o(x^3), \end{aligned}$$

d'où la réponse:

(troncation)

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{3,0,f}(x) + o(x^3) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$



**Proposition** Soit $f$ un polynôme de degré $N$. Alors pour tout $n \geq N$, pour tout $a$, $P_{n,a,f}$ coïncide avec $f$.

**Démonstration** Soit $n \geq N$. On peut (algébriquement) écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{N} c_k (x-a)^k + 0.$$

Le premier terme est un polynôme de degré $n$ ou moins.

Le second, 0, est de la forme $o[(x-a)^N]$.

Alors par l'unicité dans le théorème Taylor-Young, on a forcément

$$P_{n,a,f}(x) = \sum_{0}^{N} c_k (x-a)^k = f(x).$$



## Calcul des DL

### première méthode: calcul direct

Le calcul d'un développement limité peut toujours se faire directement en principe, en calculant les dérivées successives de la fonction.

Et parfois c'est même la meilleure façon...

## le grand jeux des DL

**On a vu :**

**combinaison linéaire**
**produit**
**composée**



**exemple** Calculer le DL en 0 et d'ordre 6 de la fonction $x \mapsto \sin(\sin x)$.

Pour le DL de $f(g(x))$ en 0: Il faut le DL de $g$ en 0 et le DL de $f$ en $g(0)$; dans la partie polynomiale de la fonction $f$, on met celui de $g$, et on applique la troncation. . .

Ici, il suffit d'avoir

$$\sin x \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$



$$\sin x \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \;=\; x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

$$\sin(\sin x) \;=$$

$$\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right] - \frac{\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right]^3}{6} + \frac{\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right]^5}{120}$$

$$+\, o(x^6)$$

$$= \quad \text{(les termes en puissances} \leqslant 6) + o(x^6)$$

**Pour dégager les termes pertinents, on utilise le binôme de Newton**



$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots$$

$$\cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n$$

$$[a+b]^3$$

$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$[a+b]^5$$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right]^3$$

$$= x^3 + 3x^2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + o(x^6)$$

$$= x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^6)$$

$$[a+b]^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

---

$$[a+b]^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right]^5$$

$$x^5 + 5x^4\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + o(x^6)$$

$$= x^5 + o(x^6)$$



$$\sin(\sin x) =$$

$$\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right] - \frac{\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right]^3}{6} + \frac{\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right]^5}{120}$$

$$+ o(x^6)$$

$$= \quad (\text{les termes en puissances} \leqslant 6) + o(x^6)$$

On substitue et simplifie pour trouver

$$\sin(\sin x) = \boxed{x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{10}x^5 + o(x^6)}$$



# Le DL de la réciproque



**Proposition (DL de la réciproque)**
Soit $g$ une fonction $n$ fois dérivable dans un voisinage de 0, telle que $g(0) \neq 0$. Soit $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ le DL d'ordre $n$ de $g$ en 0. Alors la partie polynomiale du DL d'ordre $n$ de $1/g$ en 0 se calcule par division euclidienne de 1 par $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, en tronquant à l'ordre $n$.

**exemple** Calculer le DL en 0 et d'ordre 5 de la fonction $x \mapsto 1/\cos x$.

$$\cos x \;=\; 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

$$= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + o(x^5)$$

On sait que $b_0 = 1$ et $b_1 = b_3 = b_5 = 0$ (pourquoi?).



Calculer le DL en 0 et d'ordre 5 de la fonction $x \mapsto 1/\cos x$.

$$\cos x \;=\; 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

On calcule la partie polynomiale du DL de $1/\cos$ en calculant

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}$$



$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{2-2}
1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} & 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \cdots \\ \cline{1-1}
\quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} & \\
\quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{48} & \\ \cline{1-1}
\qquad \frac{5x^4}{24} - \frac{x^6}{48} & \\
\qquad \frac{5x^4}{24} - \frac{5x^6}{48} \cdots & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad \frac{x^6}{12} + \cdots &
\end{array}$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}x^4 + o(x^5)$$

(le calcul direct est laborieux)



**Proposition (DL de la réciproque)**
Soit $g$ une fonction $n$ fois dérivable dans un voisinage de 0, telle que $g(0) \neq 0$. Soit $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ le DL d'ordre $n$ de $g$ en 0. Alors la partie polynomiale du DL d'ordre $n$ de $1/g$ en 0 se calcule par division euclidienne de 1 par $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, en tronquant à l'ordre $n$.

**Démonstration:**

**Démonstration.** Sans perte de généralité, on prend $g(0) = a_0 = 1$. La division euclidienne sert à écrire

$$1 = P_n(x)(1 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + R_n(x)\,,$$

où le polynôme $R_n$ ne contient que des puissances $x^k$ avec $k > n$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{1 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)} \\
&= \frac{\frac{1}{1+a_1x+\cdots+a_nx^n}}{1 + \frac{o(x^n)}{1+a_1x+\cdots+a_nx^n}} \\
&= \left[P_n(x) + \frac{R_n(x)}{1 + a_1x + \cdots + a_nx^n}\right]\left[1 - \frac{o(x^n)}{1 + a_1x + \cdots + a_nx^n} + o(x^n)\right]
\end{aligned}$$

(où on a utilisé $1/(1+t) = 1 - t + o(t)$)

$$= [P_n(x) + o(x^n)]\,[1 + o(x^n)]$$

$$= P_n(x) + o(x^n).$$

Il suit que $P_n$ est la partie polynomiale recherchée, par l'unicité dans la formule Taylor-Young.



Ainsi que la réciproque $1/g$, on peut aussi, de façon plus générale, calculer le DL de $f/g$ par division euclidienne :

**Proposition (DL du quotient)** Soient $f$ et $g$ deux fonctions $n$ fois dérivables dans un voisinage de 0, avec $g(0) \neq 0$. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ les parties polynomiales des DL d'ordre $n$ en 0 de $f$ et $g$. Alors $f/g$ admet un DL d'ordre $n$ en 0, et la partie polynomiale de celui-ci se calcule par division euclidienne de $P$ par $Q$ et troncation à l'ordre $n$.



**exemple** Calculons le DL d'ordre 5 en 0 de $\tan x$, par deux approches différentes.

Calcul direct?

$$\begin{aligned}
[\,\tan x\,]' &= 1 + \tan^2 x \\
[\,\tan x\,]'' &= [\,1 + \tan^2 x\,]' = 2(\tan x)[\,1 + \tan^2 x\,] \\
[\,\tan x\,]''' &= [\,2(\tan x)[\,1 + \tan^2 x\,]\,]' = 2[\,1 + \tan^2 x\,] + 6(\tan^2 x)[\,1 + \tan^2 x\,] \\
&= 2[\,1 + \tan^2 x\,](1 + 3\tan^2 x) \\
[\,\tan x\,]'''' &= \text{ouff}
\end{aligned}$$



L'autre approche :

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + +o(x^5)
\end{aligned}$$

On sait que $a_0 = a_2 = a_4 = 0$ (pourquoi?), mais comment trouver les autres?

$$
\begin{array}{r|l}
x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \\
\hline
x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
\hline
\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 & \\
\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 & \\
\hline
+\frac{2}{15}x^5 &
\end{array}
$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + +o(x^5)$$



**Un autre cas où la calcul direct du DL serait problématique : une fraction rationnelle**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

Par exemple : trouver le DL d'ordre 4 en 0 de

$$\frac{x^3+3}{(x^2+x+1)^2}$$

(Rép : $3 - 6x + 3x^2 + 7x^3 - 11x^4 + o(x^4)$)



## On revient sur le quotient, mais dans le cas éventuellement indéterminé



**Proposition (DL du quotient)** Soit $f$ et $g$ deux fonctions $n$ fois dérivables dans un voisinage de $0$. On suppose que les DL d'ordre $n$ de $f$ et $g$ en $0$ soient de la forme

$$f(x) = x^k(c_0 + c_1 x + \cdots + c_\ell x^\ell) + o(x^n),$$

$$g(x) = x^k(d_0 + d_1 x + \cdots + d_\ell x^\ell) + o(x^n),$$

où $k \geqslant 0$, $\ell \geqslant 1$, $k + \ell = n$, et $d_0 \neq 0$. Alors $f/g$ admet un DL d'ordre $\ell$ en $0$, et la partie polynomiale de celui-ci se calcule par division euclidienne des polynômes.

**Proposition (DL du quotient)** Soit $f$ et $g$ deux fonctions $n$ fois dérivables dans un voisinage de $0$. On suppose que les DL d'ordre $n$ de $f$ et $g$ en $0$ soient de la forme

$$f(x) = x^k(c_0 + c_1 x + \cdots + c_\ell x^\ell) + o(x^n),$$

$$g(x) = x^k(d_0 + d_1 x + \cdots + d_\ell x^\ell) + o(x^n),$$

où $k \geqslant 0$, $\ell \geqslant 1$, $k + \ell = n$, et $d_0 \neq 0$. Alors $f/g$ admet un DL d'ordre $\ell$ en $0$, et la partie polynomiale de celui-ci se calcule par division euclidienne des polynômes.

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

$k = 0$ et $n = \ell = 5$



## On a vu aussi un autre cas où k=0 :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)}{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)}$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + +o(x^5)$$

$k = 0$ et $n = \ell = 5$



**Proposition (DL du quotient)** Soit $f$ et $g$ deux fonctions $n$ fois dérivables dans un voisinage de $0$. On suppose que les DL d'ordre $n$ de $f$ et $g$ en $0$ soient de la forme

$$f(x) = x^k(c_0 + c_1 x + \cdots + c_\ell x^\ell) + o(x^n),$$

$$g(x) = x^k(d_0 + d_1 x + \cdots + d_\ell x^\ell) + o(x^n),$$

où $k \geqslant 0$, $\ell \geqslant 1$, $k + \ell = n$, et $d_0 \neq 0$. Alors $f/g$ admet un DL d'ordre $\ell$ en $0$, et la partie polynomiale de celui-ci se calcule par division euclidienne des polynômes.

## maintenant un exemple avec k > 0



**exemple** Calculer le DL en $0$ et d'ordre $3$ de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)/\sin x$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$ ne suffit pas!

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}$$

$$= \frac{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)}{x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$$



**Proposition (DL du quotient)** Soit $f$ et $g$ deux fonctions $n$ fois dérivables dans un voisinage de 0. On suppose que les DL d'ordre $n$ de $f$ et $g$ en 0 soient de la forme

$$f(x) = x^k(c_0 + c_1 x + \cdots + c_\ell x^\ell) + o(x^n),$$

$$g(x) = x^k(d_0 + d_1 x + \cdots + d_\ell x^\ell) + o(x^n),$$

où $k \geqslant 0$, $\ell \geqslant 1$, $k + \ell = n$, et $d_0 \neq 0$. Alors $f/g$ admet un DL d'ordre $\ell$ en 0, et la partie polynomiale de celui-ci se calcule par division euclidienne des polynômes.

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}$$

Nous omettons la démonstration

$$= \frac{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)}{x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)}$$

$$k = 1,\ \ell = 3 \text{ et } n = 4$$



$$\begin{array}{l|l}
1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} & 1 - \frac{x^2}{6} \\ \hline
1 + 0x - \frac{x^2}{6} & 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots \\
\hline
-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} & \\
-\frac{x}{2} + 0x^2 + \frac{x^3}{12} & \\
\hline
\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} & \\
\frac{x^2}{2} + 0x^3 - \frac{x^4}{12} & \\
\hline
-\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} &
\end{array}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

**défi: calcul direct**



## On étudie maintenant le lien du DL avec la dérivée et l'intégrale

**Théorème (DL de l'intégrale et de la dérivée)**
Soit $f$ une fonction $n$ fois dérivable en 0, et soit

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

son DL d'ordre $n$ en 0. Alors la fonction $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est $n+1$ fois dérivable en 0, et son DL d'ordre $n+1$ en 0 est donné par

$$F(x) = \int_0^x P(t)\,dt + o(x^{n+1}).$$

Réciproquement, soit $F$ une fonction $n+1$ fois dérivable en 0, et soit

$$F(x) = Q(x) + o(x^{n+1})$$

son DL d'ordre $n+1$ en 0. Alors le DL d'ordre $n$ en 0 de $F'$ est donné par

$$F'(x) = Q'(x) + o(x^n).$$



**Démonstration.** On prouve la première affirmation du théorème. On a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,dt \\ &= \int_0^x P(t)\,dt + \int_0^x o(t^n)\,dt. \end{aligned}$$

Le premier terme étant un polynôme de degré $n+1$ ou moins, il suffit de vérifier que le second terme est de la forme $o(x^{n+1})$. Or par le théorème des accroissements finis il existe $z$ entre 0 et $x$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x o(t^n)\,dt &= \frac{1}{x^{n+1}} o(z^n)(x-0) \\ &= \frac{o(z^n)}{z^n} \times \frac{z^n}{x^n}. \end{aligned}$$

Puisque le second facteur est borné, et puisque $z \to 0$ lorsque $x \to 0$, la démonstration est complète. ■



**exemple:** On calcule le DL d'ordre 7 en 0 de arctan



## rappel

**Calcul *direct* du DL de $\arctan x$ ??**

$$[\arctan x]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$[\arctan x]'' = \left[\frac{1}{1+x^2}\right]' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$[\arctan x]''' = \left[\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right]' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$[\arctan x]'''' = \left[\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\right]' = \ldots$$

**exemple:** On calcule le DL d'ordre 7 en 0 de arctan

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + o(t^6)$$

$$\Longrightarrow \arctan x = \int_0^x \{1 - t^2 + t^4 - t^6\}\, dt + o(x^7)$$

$$= \boxed{x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + o(x^7)}$$



**exemple:** On calcule le DL d'ordre 7 en 0 de arcsin

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\Longrightarrow$ Le calcul direct du DL n'est pas pratique.

Mais

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{5}{16}x^6 + o(x^6)$$

Car $\boxed{(1+x)^p = 1 + p\,x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$

$$(1+X)^{-1/2} = 1 + (-\tfrac{1}{2})\frac{X}{1!} + (-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}-1)\frac{X^2}{2!} + (-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}-1)(-\tfrac{1}{2}-2)\frac{X^3}{3!} + o(X^3)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}X + \tfrac{3}{8}X^2 - \tfrac{5}{16}X^3 + o(X^3)$$

$$\Longrightarrow (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \tfrac{5}{16}x^6 + o(x^6)$$



**exemple:** On calcule le DL d'ordre 7 en 0 de arcsin

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\Longrightarrow$ Le calcul direct du DL n'est pas pratique.

Mais

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{5}{16}x^6 + o(x^6)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\arcsin x = \int_0^x (1 + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{3}{8}t^4 + \tfrac{5}{16}t^6)\, dt + o(x^7)$$

$$= \boxed{x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + o(x^7)}$$



# Calcul des DL: résumé des méthodes

- calcul direct
- combinaison linéaire de DL connus
- produit
- composée (attention point de base)
- quotient (déterminé ou indéterminé)
- dérivée ou intégrale (attention ordre)

## Connaître:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^p = 1 + p\,x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$



## Applications des DL

**On commence par le calcul des limites indéterminées**



## exemple

Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$



## rappel

Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$

On vérifie les hypothèses de base de la règle de l'Hospital.
On observe que

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\,e^x - x - 1\,]'}{[\,x^2\,]'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x},$$

mais cette limite reste indéterminée.

Par contre, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\,e^x - 1\,]'}{[\,2x\,]'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Mais alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$ (itération)

Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$

## On utilise les DL :

$$\frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{\frac{1}{2} + o(x^2)/x^2}{1} \to \frac{1}{2}$$



**exemple**

Est-ce que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(1+x^3)}$$

existe?

On essaie la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left[x^2\right]'}{\left[\ln(1+x^3)\right]'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{3x^2}{1+x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(1+x^3)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1+x^3)}{3x}$$

n'existe pas

**On ne conclue rien !**



Est-ce que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(1+x^3)}$$

existe?

On utilise les DL :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x + o(x)}$$

n'existe pas (car on approche $\pm\infty$ selon que $x$ est positif ou négatif).

Ce qui nous permet de répondre (que la limite en question n'existe pas) et aussi décrire le comportement de la fonction.



**exemple** Déterminer si la limite suivante existe, et dans le cas affirmatif, l'évaluer.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^{17})}{x\left[\cos(x^8) - 1\right]}$$

$$\frac{\sin(x^{17})}{x\left[\cos(x^8) - 1\right]} = \frac{x^{17} + o(x^{34})}{x\left[-\frac{1}{2}x^{16} + o(x^{24})\right]} = \frac{x^{17}(1 + o(x^{17}))}{x^{17}(-\frac{1}{2} + o(x^8))} = \frac{1 + o(x^{17})}{-\frac{1}{2} + o(x^8)} \to -2 \text{ lorsque } x \to 0$$

$$\sin x = x + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

Soit $f(x) = \sin(x^2)$. Trouver $f^{(14)}(0)$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8)$$

$$\Longrightarrow \quad \sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + o(x^{16})$$

On en déduit

$$P_{14,0,f}(x) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!}$$

Il vient

$$\frac{f^{(14)}(0)}{14!} = -\frac{1}{7!},$$

d'où $f^{(14)}(0) = \boxed{-14!/7!}$

$= -14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8\,.$



**Leonhard Euler**

**1707-1783**



**La monographie de Euler de 1744 :**

*Méthodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu*

**On y trouve :**

- Position générale du problème
- Equation d'Euler
- Principe de moindre action
- Méthode des multiplicateurs pour les contraintes
- 100 exemples

***Axiome :***

**Le comportement d'un système physique correspond à un minimum.**

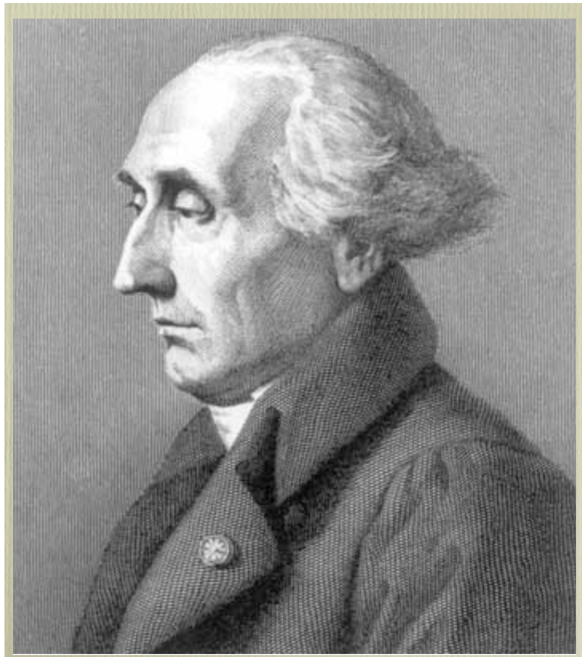


La monographie de Euler de 1744 fond le sujet qui par la suite est appelé

## Calcul des Variations

Deux personnes étroitement liées à Euler, et en particulier à cette monographie :

***Maupertuis*** et ***Lagrange*** ⇨



## *Joseph Louis Lagrange*

Né Turin 1736

- Ecrit à Euler en 1755, décrit la méthode des *variations*
- Euler renomme le sujet en son honneur : *calcul des variations*
- Euler est son mentor jusqu'à sa mort



## Pierre-Louis Moreau de Maupertuis

Né Saint-Malo 1698

- soldat
- explorateur
- héros de salon
- causeur
- philosophe de la science

- nommé président de l'Académie par Frédéric le Grand *(stupor mundi)*
- recrute Euler en 1741



## Voltaire, sur Maupertuis, *avant* de le connaître :

*Héros de la physique, Argonautes nouveaux*
*Qui franchissez les monts, qui traversez les eaux,*
*Dont le travail immense et l'exact mesure*
*De la terre étonnée ont fixé la figure.*

et *après* :

Courrier *de la physique, Argonautes nouveaux*
*Qui franchissez les monts, qui traversez les eaux,*
**Ramenez des climats, soumis aux trois couronnes**
**Vos perches, vos secteurs, et surtout deux Lapones!**
**Vous avez confirmé dans ces lieux pleins d'ennui**
**Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.**

**grand scandale** → En 1744, un an après avoir reçu le manuscrit d'Euler, Maupertuis prétend que le principe de moindre action est de lui...Euler refuse de le critiquer



1. Utiliser l'identité binomiale $[a+b]^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ afin de calculer le développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 2 de la fonction $f$ suivante :

$$f(x) = \left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right]^4.$$

**KH 6 (15 min)**

[Indication : prendre $a=1$]

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}x^3 + o(x^3)$$

2. Calculer le développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 5 des fonctions suivantes :

(a) $g(x) = e^{x^2}$ (b) $h(x) = \dfrac{e^{x^2}}{\cos x}$.

1. Utiliser l'identité $[a+b]^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ afin de calculer le développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 2 de la fonction $f$ suivante: $f(x) = \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right]^4$.

$$\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right]^4 = \left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)\right]^4$$

$$= 1^4 + 4(1)^3\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + 6(1)^2\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2$$

$$+ 4(1)\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^4$$

$$= 1 - 2x + \underbrace{\left(\frac{4}{3} + \frac{6}{4}\right)}_{\frac{17}{6}} x^2 + o(x^2) = 1 - 2x + \frac{17}{6}x^2 + o(x^2)$$



2. Calculer le développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 5 des fonctions suivantes:

(a) $g(x) = e^{x^2}$ (b) $h(x) = \dfrac{e^{x^2}}{\cos x}$.

réponse: que des puissances paires

On a

$$e^{x^2} = 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{6} + o\left((x^2)^3\right)$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

d'où

$$\frac{e^{x^2}}{\cos x} = 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{29}{24}x^4 + o(x^5)$$

(par division des deux parties polynomiales, à mettre)



$$\begin{array}{l|l} 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} & 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \\ \hline & 1 + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{29}{24}x^4 \end{array}$$

$$\frac{e^{x^2}}{\cos x} = \underbrace{1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{29}{24}x^4}_{} + o(x^5)$$