

## Fiche 6 : Applications linéaires II

---

**Exercice 1.** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^5$  définie pour tous  $\alpha, \beta$  réels par

$$f[(\alpha, \beta)] = (\alpha + 2\beta, \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta)$$

- a) Montrer que  $f$  est une application linéaire.
- b) Déterminer  $\text{Ker } f$  et préciser sa dimension.
- c) Déterminer  $\text{Im } f$  et préciser sa dimension.

**Exercice 2.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les vecteurs

$$u = (2, 1, -1), \quad v = (1, -1, 3), \quad w = (3, 3, -5).$$

On note  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $(u, v, w)$ .

- a) Déterminer une base de  $F$ .
- b) Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie pour des réels  $\alpha, \beta, \gamma$  par

$$f[(\alpha, \beta, \gamma)] = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma).$$

Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

- c) Déterminer une base de  $\text{Ker } f$  et une base de  $\text{Im } f$ . Préciser le rang de  $f$ .
- d) A-t-on  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$  ?
- e) Les vecteurs  $u, v, w$  sont-ils des éléments de  $\text{Im } f$  ?
- f) Déterminer une base et la dimension de  $F \cap \text{Im } f$

**Exercice 3.** On considère l'application linéaire  $\phi$  (exercice TD5) donnée par

$$\begin{cases} \phi(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \phi(\vec{e}_2) &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \phi(\vec{e}_3) &= \vec{e}_1 + \lambda \vec{e}_3 \end{cases} .$$

Comment choisir  $\lambda$  pour que  $\phi$  soit injective ? surjective ?

**Exercice 4.** Soit  $u$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie, pour tout  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ , par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

- b) Déterminer une base et la dimension du noyau de  $u$ . Est-elle injective ?
- c) En déduire que  $u$  est surjective.

**Exercice 5.** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Pour  $p \leq n$  on note  $e_p$  le polynôme  $X^p$ . Soit  $f$  l'application définie sur  $E$  par  $f(P) = Q$  avec  $Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$ .

- a. Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .
- b. Pour  $p \leq n$ , calculer  $f(e_p)$ ; quel est son degré ? En déduire  $\text{ker } f$ ,  $\text{Im } f$  et le rang de  $f$ .
- c. Soit  $Q$  un polynôme de  $\text{Im } f$ ; montrer qu'il existe un polynôme unique  $P$  tel que :  $f(P) = Q$  et  $P(0) = P'(0) = 0$ .

- Exercice 6.** a) Soit  $f$  une application linéaire surjective de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Quelle est la dimension du noyau de  $f$  ?
- b) Soit  $g$  une application injective de  $\mathbb{R}^{26}$  dans  $\mathbb{R}^{100}$ . Quelle est la dimension de l'image de  $g$  ?
- c) Existe-t-il une application linéaire bijective entre  $\mathbb{R}^{50}$  et  $\mathbb{R}^{72}$  ?

**Exercice 7.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer le rang de  $A$  et en déduire que  $\dim(\text{Ker}u) = 1$ .
- b) Déterminer un vecteur non nul  $f_1$  appartenant à  $\text{Ker}u$ .
- c) Trouver un vecteur  $f_2$  non nul tel que  $u(f_2) = -2f_2$ . puis un vecteur  $f_3$  non nul tel que  $u(f_3) = 4f_3$ .
- d) Montrer que la famille  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , et déterminer la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .
- e) Calculer la matrice  $A'$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
- f) Calculer  $A'^{100}$ , puis  $u^{100}(x, y, z)$  pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

## Exercices à préparer pour le contrôle.

**Exercice 1.** On considère  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = -e_1, \quad f(e_3) = e_3.$$

- a) Déterminer l'image par  $f$  d'un élément  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Déterminer le noyau et l'image de  $f$  et donner une base de chacun d'eux.
- c) Montrer que  $f \circ f = f$ .

**Exercice 2.** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq n$ , et  $f : E \rightarrow E$  définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

Montrer que  $f$  est une application linéaire. Donner sa matrice dans la base canonique et donner une base de  $\text{Im} f$  et de  $\text{ker} f$ . L'application est-elle injective ? surjective ?

**Exercice 3.** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini, pour tout  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  par

$$u(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + 2x_3).$$

- a) Quelle est la matrice  $M$  de  $u$  dans la base canonique ?
- b) Déterminer une base et la dimension de  $\text{Ker} u$ .
- c) En déduire  $\text{rang}(u)$ .
- d) Soit  $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ . Montrer que  $u(v) = 3v$ . En déduire une solution particulière du système

$$\begin{cases} \alpha = 2x_1 - x_2 - x_3 \\ \beta = -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \gamma = -x_1 - x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

En utilisant la question b), trouver toutes les solutions du système précédent.

- e) Si  $f_1 = (1, 1, 1)$ ,  $f_2 = (2, -1, -1)$  et  $f_3 = (-1, 2, -1)$ , montrer que  $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- f) Calculer les coordonnées des vecteurs  $u(f_1)$ ,  $u(f_2)$  et  $u(f_3)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . Quelle est la matrice  $N$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
- g) Calculer la matrice de changement de base  $P$  de la base canonique à la base  $\mathcal{B}'$ .
- h) Calculer  $P^{-1}$ .
- i) Exprimer la matrice de  $u^{10}$  relativement à la base canonique en fonction de  $M$ . Calculer  $N^{10}$  et en déduire  $M^{10}$ .