Fiche 6 : Applications linéaires II

Exercice 1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^5$ définie pour tous α, β reéls par

$$f[(\alpha, \beta)] = (\alpha + 2\beta, \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta)$$

a) Montrer que f est une application linéaire.

b) Déterminer Ker f et préciser sa dimension.

c) Déterminer Im f et préciser sa dimension.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (2, 1, -1), \qquad v = (1, -1, 3), \qquad w = (3, 3, -5).$$

On note F le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w).

a) Déterminer une base de F.

b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie pour des réels α, β, γ par

$$f[(\alpha, \beta, \gamma)] = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma).$$

Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

c) Déterminer une base de Ker f et une base de Im f. Préciser le rang de f.

d) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

e) Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de $\mathrm{Im} f$?

f) Déterminer une base et la dimension de $F \cap \mathrm{Im} f$

Exercice 3. On considère l'application lináire ϕ (exercice TD5) donnée par

$$\begin{cases} \phi(\vec{e_1}) &= \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \phi(\vec{e_2}) &= \vec{e_1} - \vec{e_2} \\ \phi(\vec{e_3}) &= \vec{e_1} + \lambda \vec{e_3} \end{cases}.$$

Comment choisir λ pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Exercice 4. Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t)\,.$$

b) Déterminer une base et la dimension du noyau de u. Est-elle injective ?

c) En déduire que u est surjective.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour $p \leq n$ on note e_p le polynôme X^P. Soit f l'application définie sur E par $f(P) = Q$ avec $Q(X) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

a. Montrer que f est une application linéaire de E dans E.

b. Pour $p \leq n$, calculer $f(e_p)$; quel est son degré ? En déduire $\ker f$, $\mathrm{Im} f$ et le rang de f.

c. Soit Q un polynôme de $\mathrm{Im} f$; montrer qu'il existe un polynôme unique P tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Licence L1-Math/Info – Algèbre II 2015-2016

Exercice 6. a) Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?

b) Soit g une application injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?

c) Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$?

Exercice 7. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le rang de A et en déduire que $\dim(\mathrm{Ker} u) = 1$.

b) Déterminer un vecteur non nul f_1 appartenant à $\mathrm{Ker} u$.

c) Trouver un vecteur f_2 non nul tel que $u(f_2) = -2f_2$. puis un vecteur f_3 non nul tel que $u(f_3) = 4f_3$.

d) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

e) Calculer la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$.

f) Calculer A'^{100}, puis $u^{100}(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercices à préparer pour le contrôle.

Exercice 1. On considère $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_1\,, \quad f(e_2) = -e_1\,, \quad f(e_3) = e_3\,.$$

a) Déterminer l'image par f d'un élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.

c) Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

Montrer que f est une application linéaire. Donner sa matrice dans la base canonique et donner une base de $\mathrm{Im} f$ et de $\ker f$. L'application est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + 2x_3)\,.$$

a) Quelle est la matrice M de u dans la base canonique ?

b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\, u$.

c) En déduire $\mathrm{rang}(u)$.

d) Soit $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Montrer que $u(v) = 3v$. En déduire une solution particulière du système

$$\begin{cases} \alpha = 2x_1 - x_2 - x_3 \\ \beta = -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \gamma = -x_1 - x_2 + 2x_3\,. \end{cases}$$

En utilisant la question b), trouver toutes les solutions du système précédent.

e) Si $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (2, -1, -1)$ et $f_3 = (-1, 2, -1)$, montrer que $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

f) Calculer les coordonnées des vecteurs $u(f_1)$, $u(f_2)$ et $u(f_3)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Quelle est la matrice N de u dans la base $\mathcal{B}'$.

g) Calculer la matrice de changement de base P de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$.

h) Calculer P^{-1}.

i) Exprimer la matrice de u^{10} relativement à la base canonique en fonction de M. Calculer N^{10} et en déduire M^{10}.