

Fiche 6 : Revisions

Exercice 1. On considère f l'endomorphisme de \mathbb{K}^3 défini par

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_1,$$

où $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de \mathbb{K}^3 .

- a) Montrer que f est bijective.
- b) Montrer que $f^3 = \text{Id}_{\mathbb{K}^3}$.
- c) Démontrer que $F := \{u \in \mathbb{K}^3 : f(u) = u\}$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{K}^3 et déterminer sa dimension.

Exercice 2. Soit f un endomorphisme de \mathbb{K}^n tel que $f^2 = f$ (on dit que f est un projecteur).

- a) Démontrer que $\text{Id}_{\mathbb{K}^n} - f$ est aussi un projecteur.
- b) Démontrer que $\text{Ker}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n} - f) = \text{Im} f$.
- c) Démontrer que $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$ sont supplémentaires.
- d) Donner un exemple de projecteur p dans \mathbb{R}^n .

Exercice 3. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + 2x_3).$$

- a) Quelle est la matrice M de u dans la base canonique ?
- b) Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker} u$.
- c) En déduire $\text{rang}(u)$.
- d) Soit $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Montrer que $u(v) = 3v$. En déduire une solution particulière du système

$$\begin{cases} \alpha = 2x_1 - x_2 - x_3 \\ \beta = -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \gamma = -x_1 - x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

En utilisant la question b), trouver toutes les solutions du système précédent.

- e) Si $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (2, -1, -1)$ et $f_3 = (-1, 2, -1)$, montrer que $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- f) Calculer les coordonnées des vecteurs $u(f_1)$, $u(f_2)$ et $u(f_3)$ dans la base \mathcal{B}' . Quelle est la matrice N de u dans la base \mathcal{B}' .
- g) Calculer la matrice de changement de base P de la base canonique à la base \mathcal{B}' .
- h) Calculer P^{-1} .
- i) Exprimer la matrice de u^{10} relativement à la base canonique en fonction de M . Calculer N^{10} et en déduire M^{10} .

Exercice 4. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par

$$f(e_1) = -e_1 + 2e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3, \quad f(e_3) = 2e_2 - e_3.$$

- Déterminer la matrice de f relativement à la base \mathcal{B} .
- f est-elle bijective ?
- Montrer que $\mathcal{B}' = \{e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 + e_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 . Calculer la matrice de f dans la base \mathcal{B}' .

Exercice 5. On note $\varphi : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X]$ l'application définie, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

- Montrer que φ est linéaire et déterminer son noyau.
- Montrer que φ envoie le sous-espace $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même. Déterminer le noyau et l'image de la restriction φ_n de φ au sous-espace $\mathbb{C}_n[X]$. Quelle est l'image de φ ?

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur \mathbb{R} , soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et soit f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -7e_1 - 6e_2 \\ f(e_2) &= 8e_1 + 7e_2 \\ f(e_3) &= 6e_1 + 6e_2 - e_3. \end{aligned}$$

- Calculer la matrice de f dans la base \mathcal{B} , puis la matrice de $f \circ f$ dans cette même base.
- En déduire que f est bijective.

Exercice 7. a) En fournissant une matrice équivalente échelonnée, déterminer le rang de chacune des matrices réelles suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

- Quelle est la dimension du sous-espace de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $(-1, 4, 3)$, $(7, 2, 9)$ et $(0, 1, 1)$?
- Quelle est la dimension du sous-espace de \mathbb{R}^3 défini par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} -x + 7y & = 0 \\ 4x + 2y + z & = 0 \\ 3x + 9y + z & = 0 \end{cases} \quad ?$$

- Et quelle est celle du sous-espace de \mathbb{R}^3 défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} -x + 4y + 3z & = 0 \\ 7x + 2y + 9z & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases} \quad ?$$

e) Quelle est la dimension du sous-espace de \mathbb{R}^5 défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t + 5u = 0 \\ 6x + 7y + 8z + 9t + 10u = 0 \\ 11x + 12y + 13z + 14t + 15u = 0 \\ 16x + 17y + 18z + 19t + 20u = 0 \end{cases} \quad ?$$

f) Et quelle est celle du sous-espace de \mathbb{R}^4 défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x + 6y + 11z + 16t = 0 \\ 2x + 7y + 12z + 17t = 0 \\ 3x + 8y + 13z + 18t = 0 \\ 4x + 9y + 14z + 19t = 0 \\ 5x + 10y + 15z + 20t = 0 \end{cases} \quad ?$$

Exercice 8. On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x - y, z).$$

On note \mathcal{B}_1 la base canonique de \mathbb{R}^3 et \mathcal{B}_2 la base canonique de \mathbb{R}^2 .

1. Déterminer la matrice de f dans les bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 .
2. Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = ((1, 2), (-1, 1))$ est une base de \mathbb{R}^2 .
3. Calculer les matrices de passage de \mathcal{B}_2 vers \mathcal{B}_3 et de \mathcal{B}_3 vers \mathcal{B}_2 .
4. Montrer que la famille $\mathcal{B}_4 = ((1, 0, -1), (4, 0, 3), (1, 1, 0))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
5. Calculer les matrices de passage de \mathcal{B}_1 vers \mathcal{B}_4 et de \mathcal{B}_4 vers \mathcal{B}_1 .
6. Déterminer la matrice de f dans les bases \mathcal{B}_4 et \mathcal{B}_3 .

Exercice 9. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans \mathcal{B} est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer le rang de A et en déduire que $\dim(\text{Ker } u) = 1$.
- b) Déterminer un vecteur non nul f_1 appartenant $\text{Ker } u$.
- c) Trouver un vecteur f_2 non nul tel que $u(f_2) = -2f_2$. puis un vecteur f_3 non nul tel que $u(f_3) = 4f_3$.
- d) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 , et déterminer la matrice de passage P de la base \mathcal{B} la base \mathcal{B}' .
- e) Calculer la matrice A' de u dans la base \mathcal{B}' .
- f) Calculer A'^{100} , puis $u^{100}(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Soit $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$A \mapsto A + {}^t A.$$

1. Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
2. Montrer que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.