3. Calcul Matriciel

Exercice 1 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Quels sont les produits possibles de deux de ces trois matrices ? Calculer les produits.

Exercice 2 Soient S et T deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ définies par

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer S^2, T^2, ST, TS, STS et TST.

Exercice 3 Soient A et B deux matrices de $M_p(\mathbb{C})$ ($p \in \mathbb{N}^*$) satisfaisant $AB = BA$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. Soient $a, b, q, r \in \mathbb{C}$. Vérifier que $a = bq + r$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

2. L'algorithme d'Euclide appliqué aux nombres 237 et 53 donnent

$$\begin{aligned} 237 &= 53 \times 4 + 25 \\ 53 &= 25 \times 2 + 3 \\ 25 &= 3 \times 8 + 1. \end{aligned}$$

On a donc,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 53 \\ 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 53 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 237 \\ 53 \end{pmatrix}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer A et en utilisant le calcul matriciel, déterminer des entiers u et v tel que $1 = 237u + 53v$.

3. Calculer le PGCD de 738 et 395 à l'aide de l'algorithme d'Euclide. En déduire une identité de Bézout avec la méthode ci-dessus.

Exercice 5 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^2 = 5A - 4\mathbf{1}_3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 6 À tout nombre réel t, on associe la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $M(0)$.
2. Soient s et t deux réels. Calculer le produit $M(s)M(t)$.
3. En déduire que pour tout réel t, la matrice $M(t)$ est inversible et expliciter son inverse.

Exercice 7 Soit Q le $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ engendré par

$$\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $I^2, J^2, K^2, IJ, JI, JK, KJ, KI$ et IK.
2. Montrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$, il existe des uniques $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ tels que $(a\mathbf{1}_2 + bI + cJ + dK)(p\mathbf{1}_2 + qI + rJ + sK) = \mathbf{1}_2$.
3. En déduire que Q est un corps non-commutatif.

Exercice 8 Calculer le rang des matrices suivantes et leurs inverses si elles sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & i-4 & 3-i \\ -i & 3-i & i-2 \\ 1-i & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 On se propose de déterminer trois suites de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les premiers trois termes a_0, b_0, c_0 et les relations de récurrences suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n + c_n \\ c_{n+1} = -a_n - 2b_n + 4c_n \end{cases}.$$

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant des opérations élémentaires, vérifier que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
3. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = PDP^{-1}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire les expressions respectives des termes a_n, b_n, c_n en fonction de a_0, b_0, c_0 et n pour tout entier naturel n.

Exercice 10 Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\ \begin{cases} x + 2y - 4z = -4, \\ 2x + 5y - 9z = -10, \\ 3x - 2y + 3z = 11. \end{cases} \qquad (S_2)\ \begin{cases} x + y - z = 8, \\ x + 2y - 3z = 5, \\ 3x + 2y - z = 2. \end{cases} \qquad (S_3)\ \begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = 2, \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5, \\ 3x + 4y - 5z + 2t = 4. \end{cases}$$

Exercice 11 Soit m un nombre réel.

1. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} m & m & -1 \\ m & 1 & -m \\ 1 & m & -m \end{pmatrix}$ en fonction de la valeur de m.
2. Selon les valeurs du paramètre m, résoudre le système suivant :

$$(S_m)\ \begin{cases} mx + my - z = 0, \\ mx + y - mz = 0, \\ x + my - mz = 0. \end{cases}$$

Exercice 12 Suivant la valeur des nombres réels a, b, c et d, résoudre le système suivant :

$$(S)\ \begin{cases} x - y - z = a, \\ 2x + y - z = b, \\ x + y - 3z = c, \\ 2x - y - z = d. \end{cases}$$

Exercices à préparer pour les contrôles.

Exercice 1 Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ en fonction de $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.
2. Exprimer B en fonction de A et de la matrice unité $\mathbf{1}_3$.
3. En déduire les puissances B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 1. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + w = 4, \\ 2x + y + 3z + 2w = 8, \\ 3x + 4y + 2z + 3w = 12. \end{cases}$$

Exercice 4 Soit m un nombre réel.

1. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$ en fonction de la valeur de m.
2. Selon les valeurs du paramètre m, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - (1-m)z = m + 2, \\ (1+m)x - y + 2z = 0, \\ 2x - my + 3z = m + 2. \end{cases}$$

Exercice 5 Résoudre suivant les valeurs de a et $\mu \in \mathbb{R}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} ax + y + z + t = 1, \\ x + ay + z + t = \mu, \\ x + y + az + t = \mu^2, \\ x + y + z + at = \mu^3. \end{cases}$$