

FICHE N°3 (Complément):

**Exercice 13.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif et  $n$  un entier strictement positif. On pose

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ inversible}\}.$$

1. Montrer que, pour  $A, B$  deux éléments de  $GL_n(\mathbb{K})$ , on a  $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ .
2. En déduire que  $GL_n(\mathbb{K})$  est un groupe pour le produit de matrices.

Le groupe  $GL_n(\mathbb{K})$  est appelé le **groupe général linéaire de degré  $n$  du corps  $\mathbb{K}$** .

**Exercice 14.** Posons  $O_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid {}^tAA = \mathbf{1}_n\}$ .

1. Montrer que  $O_n(\mathbb{K})$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{K})$ .
2. Cas particulier: montrer que pour tout élément  $A \in O_2(\mathbb{R})$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Le groupe  $O_n(\mathbb{K})$  est appelé le **groupe orthogonal**.

**Exercice 15.** Soit  $n$  un entier tel que  $n > 1$  et posons

$$A := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $A^n = \mathbf{1}_2$ . En déduire que  $G := \{A^i \mid (0 \leq i < n)\}$  est un sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$  d'ordre  $n$ .
2. Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  dans  $G$  définie par  $\varphi(\bar{i}) := A^i$  pour  $\bar{i} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est bien définie et que  $\varphi$  est un morphisme.
  - (b) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme.
3. Posons  $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
  - (a) Montrer que  $B^2 = \mathbf{1}_2$  et  $BAB^{-1} = A^{-1}$ .
  - (b) En déduire que  $H := \{A^i, A^iB \mid (0 \leq i < n)\}$  est un sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$ .

Le groupe  $H$  est appelé le **groupe diédral d'ordre  $2n$**  et noté  $D_n$ .