2. Espaces vectoriels

Exercice 1 On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition habituelle :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et de la loi externe :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x_1, x_2)) & \mapsto & (\lambda x_1, 0)\,. \end{array}$$

A-t-on muni ainsi $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 *Soit $E = \mathbb{R}_+^*$. On définit sur E une loi de composition interne, notée $\hat{+}$, par*

$$(x, y) \mapsto x \hat{+} y := xy$$

et une loi de composition externe sur $\mathbb{R}$ par

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda * x := x^\lambda.$$

Montrer que $(E, \hat{+}, *)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 3 Dans les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.
5. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.
6. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ et } z = x\}$.

Exercice 4 Etudier la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

a) $u = (2, -3)$, $v = (-1, 1)$;
b) $u = (-6, 2)$, $v = (9, -3)$.
c) $u = (m + 1, -1)$, $v = (-3, m - 1)$ où $m \in \mathbb{R}$

Exercice 5 Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

a) $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, -1)$.
b) $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, -1, 1)$.
c) $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 0, 1)$, $z = (-1, 1, 1)$.
d) $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -1, 2)$, $w = (1, -2, -1)$.
e) $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$.

Les familles de $\mathbb{R}^3$ données ci-dessus sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Lorsque la réponse est négative, on déterminera le sous-espace engendré et sa nature géométrique.

Exercice 6 On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x+y+z+t=0\} \\ G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x+y=z+t\} \\ H &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,:\, a=b=c=d\}\,. \end{aligned}$$

a) Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$; donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Quelle est la dimension de $F+G$? En déduire une déscription explicite de $F+G$.

c) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.

Exercice 7 On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y=z=0\} \\ F_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y=0\} \\ F_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+z=y\} \\ F_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x=y\}\,. \end{aligned}$$

a) Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$; donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Déterminer $F_2 + F_3$.

c) Déterminer $F_2 \cap F_3$ et sa dimension. Que peut-on en déduire pour F_2 et F_3 ?

d) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

e) Montrer que F_1 et F_4 sont supplémentaires.

f) Quelle remarque peut-on faire en considérant les questions d) et e) ?

g) Indiquer la nature géométrique de chaque F_i.

Exercice 8 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F_1, F_2, F_3 sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F_1 := \{(t,-t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 := \{(0,t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_3 := \{(t,0,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_2 \cap F_3 = \{0\}$ et $F_3 \cap F_1 = \{0\}$.
2. La somme $F_1 + F_2 + F_3$ est-elle directe ? Vérifier votre réponse.

Exercice 9 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u_1 = (2,-3,1)$ et $u_2 = (2,-2,1)$.

a) Quelle est la dimension de F ?

b) Démontrer que le vecteur $u = (0,1,0)$ est élément de F, mais que $v = (0,0,1)$ ne l'est pas.

c) Calculer les composantes du vecteur $w = (0,4,0) \in F$ dans la base (u_1, u_2).

d) Exprimer qu'un vecteur $v = (x,y,z)$ appartient F par une équation en x, y, z.

f) Indiquer la nature géométrique de F.

Exercice 10 Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x+y=0 \text{ et } z=2t\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de E. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11

a) Quelle est la dimension de $\mathbb{C}^2$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Donner une base.
b) Montrer que les vecteur suivants de $\mathbb{C}^3$

$$v_1 = (1+i, 1+2i, i),\ v_2 = (2, 4-i, -1),\ v_3 = (0, -1+2i, 2+i)$$

sont liés si $\mathbb{C}^3$ est consideré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et sont libres si $\mathbb{C}^3$ est consideré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 Pourquoi les polynômes 1, X, $X(X-1)$, $X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 3 ? Exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 13 Soit $E := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)X + \mu X^2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2) et en donner une base.

Exercice 14 Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels. Montrer que P et ses n dérivées forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 15 Soit $\mathbb{R}^{[a,b]} = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Rappeler les définitions de l'addition et de la multiplication externe sur $\mathbb{R}^{[a,b]}$ et dire lequels de ces sous-ensemble sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{[a,b]}$:
a) $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) = \{$fonctions continues $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$;
b) ensemble des applications surjectives (resp. injectives) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$;
c) ensemble des applications $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $2f(a) = f(b)$;
d) ensemble des applications $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(a) = f(b) + 1$.

Exercice 16 Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2\ u_n \quad (n \geq 0).$$

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
b) Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de $\mathcal{E}$.
c) Tenant compte du fait que les suites de $\mathcal{E}$ sont univoquement déterminées si on connaît u_0 et u_1, montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de $\mathcal{E}$.
d) Déterminer les suites de $\mathcal{E}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

Exercice 17
a) Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$; puis de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
b) Dans $\mathbb{R}^3$ donner un exemple de deux sous-espaces dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercices à préparer pour les contrôles.

Exercice 18 On considère les ensembles

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x + z = -y\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x + y = 1\}.$$

Pour chacun, indiquer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ou non.

Exercice 19 Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y dans $\mathbb{R}$ pour que $(x, 1, y, 1) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Exercice 20 On considère les vecteurs $u = (4, -2, 0)$, $v = (3, 0, 3)$, $w = (1, 0, 1)$, $z = (-2, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathcal{F} = (u, v, w, z)$ est-elle libre ou liée ? Calculer $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Vect}(u, v, w, z)$.

Exercice 21 Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z = 0\}, \\ G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y - t = z = 0\}. \end{aligned}$$

a) Donner une base de F, G, et $F + G$.
b) Enoncer la formule de Grassmann et en déduire $\dim(F \cap G)$.
c) Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 22 On considère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$\mathcal{F} = \{v_1 = (0, 1, -1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 2, -1), v_4 = (0, 0, 1)\}.$$

a) On pose $V = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$. Extraire de $\mathcal{F}$ une base de V.
b) En déduire $\dim_{\mathbb{R}}(V)$.
c) Exprimer qu'un vecteur (x, y, z) appartient à V par une equation en x, y, z.
d) En déduire du point c) ou montrer directement que le vecteur $w_1 = (2, -1, 1) \notin V$.

Exercice 23 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, des polynômes réels de degrés au plus égal à 3, on considère la famille suivante :

$$\mathcal{V} = \left(P_1 = (1 + X), P_2 = (1 + X^3), P_3 = (1 - X^3)\right).$$

a) Démontrer que $\mathcal{V}$ est une famille libre.
b) Ecrire les vecteurs 1 et $3 + X^3$ comme combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{V}$.
c) Complèter la famille $\mathcal{V}$ en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 24 Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les deux sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\},$$

$$G = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 4)\}.$$

a) Déterminer une base de F et une base de G.
b) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.
c) La somme $F + G$ est-elle directe ? Motiver votre réponse.