1. Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1 1. Calculer $(X+1)^5 - (X-1)^5$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Soient $n \geq 1$ un entier et a, b deux réels. Déterminer le degré du polynôme à coefficients réels

$$P = (X^2 + X + 1)^n - aX^{2n} - bX^{2n-1}$$

en fonction des valeurs de a et b.

Exercice 2 Soient a, b des réels, et $P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 3 Calculer $P = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$ et en déduire une preuve que 100009 n'est pas un nombre premier.

Exercice 4 Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de

1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$

Exercice 5 Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$ par $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6 Soit $n \geq 1$ un entier et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $(\cos\theta + X \sin\theta)^n$ par le polynôme $X^2 + 1$.

Exercice 7 Déterminer les racines complexes des polynômes à coefficients réels suivants :

1. $2X^2 - X + 1$,
2. $X^4 - 13X^2 + 36$,
3. $X^4 + 6X^2 + 25$.

En déduire les factorisations de ces polynômes en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8 Factoriser en produit de facteurs irréductibles les polynômes suivants

1. $X^4 - 16$ dans $\mathbb{C}[X]$;
2. $X^4 - 16$ dans $\mathbb{R}[X]$;
3. $X^6 - 2^6$, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ (Expliciter les coefficients sous formes algébriques) ;
4. $X^4 + j$ dans $\mathbb{C}[X]$ où $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Exercice 9 Soit $P = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 4X + 8 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier que 2 est racine double de P.
2. En déduire une factorisation de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10 Soient α un réel et $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer α.
2. Montrer que -1 est une racine double de P.
3. Montrer que $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ est une racine multiple de P.
4. Factoriser P en produit de facteurs irréductibles, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11 Soient a, b des réels, et $P = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Déterminer a et b pour que -1 soit racine double de P.
2. Calculer la formule de Taylor pour P en -1.
3. Calculer la formule de Taylor pour P en 1.

Exercice 12 Soit $P = X^4 + X^3 - 4X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Calculer P' et vérifier que 1 est racine double de P.
2. Écrire la formule de Taylor pour P en 1.
3. Calculer le quotient de P par $(X-1)^2$.
4. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 13 Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes et les décomposer.

$$\frac{1}{(X+1)(X-2)}, \quad \frac{X^5 - X^3 + X + 1}{(X+1)(X-2)}, \quad \frac{X+3}{X(X-1)(X+1)}, \quad \frac{2X}{X^2+X+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-X-X^2}.$$

Exercice 14 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$, la fraction rationnelle $\dfrac{2X^3+1}{(X+1)(X^2-3X+2)}$.

Exercice 15 Soit $P = X^3 + 2X^2 + 3X + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Donner la formule de Taylor pour P en 1.
2. En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $\dfrac{X^3+2X^2+3X+4}{(X-1)^4}$.

Exercice 16 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$, la fractions rationnelle $\dfrac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$.

Exercice 17 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$, la fractions rationnelle $\dfrac{X^4+1}{(X-1)^2(X^2+1)}$.

Exercice 18 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$, la fractions rationnelle $\dfrac{X^3+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$.

Exercices à préparer pour les contrôles.

Exercice 19 Factoriser $X^{12} - 2^6$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$. On explicitera les coefficients des facteurs sous forme algébrique.

Exercice 20 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit α un réel. On note R_α le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$. Montrer que $R_\alpha = P(\alpha)$.
2. Soit S le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$. Montrer que $S = 0$ si et seulement si $P(i) = 0$.
3. Déterminer les entiers positifs n tel que $X^2 + 1$ divise $X^n + 1$.

Exercice 21 Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes et les décomposer.

$$\frac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}, \quad \frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2}, \quad \frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 2X + 1} \quad \text{et} \quad \frac{X^3 + 1}{(X + 1)(X^2 + X + 1)}.$$

Exercice 22 Soit $P = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier que i est une racine complexe de P.
2. Déterminer l'ensemble des racines complexes de P.
3. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X^2}{X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2}$ et la décomposer.