Résumé de Cours 8

La formule de rang Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, e;g, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Théorème (La formule du rang) Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Supposons que $\dim E < \infty$. Alors, on a

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E.$$

La bijectivité d'une application linéaire est un peu particuleère :

Corollaire Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Supposons que les dimensions de deux espaces vectoriels E et F soient finies.

1. Si f est bijective, alors $\dim E = \dim F$.
2. Supposons que $\dim E = \dim F$. Alors, f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective. $\square$

Citons un lemme pratique :

Lemme Soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective. Alors, sa réciproque f^{-1} est aussi linéaire. $\square$

Opérations sur applications linéaires

Notons par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. En particulier, on note $\mathcal{L}(E, E)$ par $\mathcal{L}(E)$. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ muni de

1. (**structure interne**) $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ $\forall\, f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\forall\, x \in E$,
2. (**structure externe**) $(\lambda f)(x) := \lambda(f(x))$ $\forall\, f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, et $x \in E$,

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Lemme Soit $f_1, f_2, f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g_1, g_2, g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors,

1. la composée $g \circ f$, définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in E)$, est une application linéaire de E dans G,
2. $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$,
3. $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$.

En particulier, on a

Lemme $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire non-commutatif. $\square$

Application linéaire et Matrice Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ et $\mathcal{C} = \{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_m\}$ des bases de E et F, respectivement. Soit $a_{i,j}$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ des scalaires tels que $f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j}\mathbf{f}_i$ pour tout $1 \le j \le n$ (attention aux indices !). La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

s'appelle la **matrice de f dans les base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** et notée par $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Soit $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j\mathbf{e}_j \in E$ avec $x_j \in \mathbb{K}$. Posons $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m y_i\mathbf{f}_i = f(\mathbf{x})$. Par définition, on a

$$\mathbf{y} = f(\sum_{j=1}^n x_j\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j f(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{i,j}\mathbf{f}_i\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right)\mathbf{f}_i,$$

d'où $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$. Posons $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_m \end{pmatrix}$, on en conclut que

$$Y = AX \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{x})) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}).$$

Interprétations d'opérations sur matrices

Soit E, F $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $f, g : E \to F$ deux applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$. On peut définir l'application linéaire $f + g, \lambda f : E \to F$ par $(f+g)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ et $(\lambda f)(\mathbf{x}) := \lambda f(\mathbf{x})$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F, respectivement. Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$. On a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f+g) = A + B, \qquad \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f) = \lambda A.$$

Soit E, F, G $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ applications linpaires. On sait que la composée $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire.
Soit $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des bases de E, F et G, respectivement. Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)$ et $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. On a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = AB.$$

Remarque En fixant des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F respectivement, on obtient un *isomorphisme* entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{m,n}(\mathbb{K})$ $(\dim E = n,\ \dim F = m)$ par

$$\mathcal{L}(E, F) \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{K}); \qquad f \longmapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

En particulier, $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{K})$ comme anneau.
(Un isomorphisme est un morphisme dont la réciproque est aussi un morphisme.) $\square$