Résumé de Cours 7

Applications du pivot de Gauss Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

1. **Système d'équations linéaires:** soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Considérons le système d'équations linénaires :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2, \\ & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_n. \end{cases}$$

Appliquons le **pivot de Gauss (avec opérations sur lignes)** à la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix},$$

on trouvera les solutions.

2. **Système générateur $\to$ base:** soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leq i \leq m$, soit $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \cdots, a_{i,n}) \in \mathbb{K}^n$. Posons $\mathcal{F} = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. Soit $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F})$, i.e., le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par $\mathcal{F}$. Pour trouver une base de F, appliquer le **pivot de Gauss (avec opérations sur lignes)** à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

et la transformer sous forme de **matrice echelonnée**:

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots \\ 0 & \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots \\ 0 & \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \end{pmatrix}.$$

Alors, il existe $1 \leq r \leq m$ tel que $a'_1 \neq 0, a'_2 \neq 0, \cdots, a'_r \neq 0$ et $a'_{r+1} = a'_{r+2} = \cdots = a'_m = 0$.

Lemme $(a'_1, a'_2, \cdots, a'_r)$ est une base de F. □

Définition La dimension de $F (= r)$ s'appelle le **rang** de la matrice A. □

Pour trouver une base à partir d'un système de vecteurs en colonne, il suffit d'appliquer le **pivot de Gauss avec opérations sur colonne**. En effet, le passage entre vecteurs en ligne et en colonne se fait en prenant la **transposée d'une matrice**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \implies {}^tA := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

Remarque Pour calculer le rang d'une matrice A, on pourra appliquer le **pivot de Gauss avec opérations sur ligne et sur colonne**. □

Applications linéaires Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit E et F $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** (ou **$\mathbb{K}$-linéaire**) lorsque l'application f satisfait les deux conditions suivantes :

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ pour tous $u, v \in E$, et
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ pour tous $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Le lemme suivant est pratique :

Lemme Une application est linéaire si et seulement si
$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$ pour tous $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. $\square$

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. L'ensemble $\operatorname{Ker} f := \{u \in E | f(u) = 0\}$ s'appelle le **noyau** de f.

Lemme $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Le lemme suivant est un critère simple pour que f soit injective :

Lemme Une application linéaire $f : E \to F$ est *injective* si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. $\square$

L'ensemble $\operatorname{Im} f := \{f(u) | u \in E\}$ s'appelle l'**image** de f.

Lemme $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F. $\square$

Donc, on pourra définir le **rang** de l'application linéaire f, noté $\operatorname{rang}(f)$, par la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Remarque Il est claire qu'une application linéaire $f : E \to F$ est *surjective* si et seulement si $\operatorname{rang}(f) = \dim F$. $\square$