Résumé de Cours 5

Base d'un espace vectoriel Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatifs, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc.

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit **de type fini** si E possède une famille génératice finie.

Théorème Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **type fini**. Alors,

1. une base $\mathcal{B}$ de E existe et
2. le cardinal de $\mathcal{B}$ ne dṕend pas d'un choix de base. $\square$

Le cardinal d'une base est appelé la **dimension** de E, notée par $\dim_{\mathbb{K}} E$ (ou simplement $\dim E$).

Preuve du théorème Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de type fini.

La première étape est de montrer

Lemme Soit $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ un système libre de E et $\{g_1, g_2, \cdots, g_q\}$ un système générateur de E. Alors, $p \leq q$. $\square$

Une conséquence de ce lemme est la deuxième partie du théorème :

Corollaire Toutes les bases de E ont le même cardinal. $\square$

Remarque. une `base` = un `système générateur minimal` = un `système libre maximal`. $\square$

Pour montrer la première partie du théorème, on commence par un théorème utile

Théorème (théorème de la base incomplète) Soit $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ un système libre de E. Alors, il existe $l \in \mathbb{N}$ et $f_{p+1}, \cdots f_{p+l} \in E$ tels que $\{f_1, \cdots, f_p, f_{p+1}, \cdots, f_{p+l}\}$ soit une base de E. $\square$

Une conséquence de ce théorème est la première partie du théorème :

Corollaire E possède une base. $\square$

Dimension de sous-espace vectoriel Soit E un $\mathbb{K}$-space vectoriel de type fini.

Lemme Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors,

1. $\dim F \leq \dim E$,
2. $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$.

Somme de 2 sous-espaces vectoriels Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de type fini.

Formule (Grassmann) Soit Soit F et G sous-espaces vectoriels de E. Alors,

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G).$$

Preuve (esquisse) Soit $\mathcal{B}$ une base de $F \cap G$.

1. Complèter $\mathcal{B}$ en bases de F et G, notées par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ respectivement.
2. On pourra montrer que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base de $F + G$.
3. Enfin, $\dim (F + G) = |\mathcal{F} \cup \mathcal{G}| = |\mathcal{F}| + |\mathcal{G}| - |\mathcal{F} \cap \mathcal{G}| = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$.