Résumé de Cours 3

§ Addenda

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Polynômes

Lemme Soit $P, Q, R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Si $P|Q \cdot R$ et que $PGCD(P, Q) = 1$, alors $Q|R$. $\square$

Fraction rationnelle

Travaillons un cas particulier d'une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ $(P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q \neq 0)$.
Supposons que $d^o(P) < d^o(Q)$ et $Q = \prod_{i=1}^{N}(X - \alpha_i)$ $(\alpha_i \in \mathbb{K})$. Alors, il existe des scalaires $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq r)$ tels que

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i}{X - \alpha_i}.$$

Dans ce cas, pour calculer λ_j $(1 \leq j \leq r)$,

1. multiplier $(X - \alpha_j)$ à deux cotés :

$$(X - \alpha_j)\frac{P}{Q} = \frac{P}{(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_{j-1})(X - \alpha_{j+1}) \cdots (X - \alpha_r)} = \lambda_j + (X - \alpha_j) \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{X - \alpha_i}.$$

2. évaluer-les en α_j :

$$\lambda_j = \frac{P(\alpha_j)}{(\alpha_j - \alpha_1) \cdots (\alpha_j - \alpha_{j-1})(\alpha_j - \alpha_{j+1}) \cdots (\alpha_j - \alpha_r)} = \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}.$$

$\boxed{\text{§ Structures algèbriques}}$

Groupe

Soit G un ensemble non-vide. Soit $* : G \times G \longrightarrow G$ une application. Le couple $(G, *)$ est dit un **groupe** lorsqu'ils satisfont

1. (associativité) $\quad (a * b) * c = a * (b * c) \qquad \forall\, a, b, c \in G$,
2. il existe un unique $e \in G$ tel que $a * e = e * a = a \qquad \forall\, a \in G$, et
3. pour tout $a \in G$, il existe un unique $a' \in G$ tel que $a * a' = a' * a = e$. Dans ce cas, on note a' par a^{-1}.

L'application $*$ s'appelle le **produit** ou la **multiplication**. L'élément e dans 2. s'appelle l'**élément neutre** et l'élément a^{-1} dans 3. est dit l'**inverse** de a.

En particulier, lorsque un groupe $(G, *)$ satisfait

4. $a * b = b * a \qquad \forall\, a, b \in G$,

$(G, *)$ est dit **abélien**. Dans ce cas, le produit $*$ est souvent noté par $+$ et l'inverse d'un élément $a \in G$ est noté par $-a$.

Anneau

Soit A un ensemble non-vide. Soit $*, + : A \times A \longrightarrow A$ deux applications. Le triple $(A, +, *)$ est dit un **anneau** lorsqu'ils satisfont

1. le couple $(A, +)$ est un groupe abélien (notons l'élément neutre par 0),
2. l'application $*$ est associative,
3. (distributivité) pour tout $a, b, c \in A$,
   (a) $(a + b) * c = a * c + b * c$,
   (b) $a * (b + c) = a * b + a * c$,

L'application $+$ s'appelle la **somme** et l'application $*$ s'appelle le **produit** ou la **multiplication**. Lorsque un anneau $(A, +, *)$ satisfait

4. il existe un unique $1 \in A$ tel que $1 * a = a * 1 = a$ pour tout $a \in A$,

cet anneau est dit **unitaire**, et lorsque le produit $*$ satisfait

4'. $a * b = b * a$ pour tout $a, b \in A$,

cet anneau est dit **commutatif**, sinon on le dit **non-commutatif**.

Corps

Lorsque un anneau unitaire $(K, +, *)$ satisfait

1. pour tout $a \in K \setminus \{0\}$, il existe un unique $a' \in K$ tel que $a * a' = a' * a = 1$,

cet anneau est dit un **corps**. L'élément a' sera noté par a^{-1} et dit l'**inverse** de a.

Éspace vectoriel Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Un ensemble E non-vide est dit un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$**-espace vectoriel**) lorsque E est muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ satisfaisant

1. $(E, +)$ est un groupe abélien, i.e.,
   (a) (associativité) $(u + v) + w = u + (v + w)$ pour tous $u, v, w \in E$,
   (b) il existe un unique élément $0 \in E$ tel que $u + 0 = 0 + u = u$ pour tout $u \in E$,
   (c) pour tout $u \in E$, il existe un unique élément noté $-u$ tel que $u + (-u) = (-u) + u = 0$, et
   (d) (commutativité) $u + v = v + u$ pour tous $u, v \in E$
2. (distributivité)
   (a) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$,
   (b) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E$,
3. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E$,
4. $1 \cdot u = u$ pour tout $u \in E$.

Un élément de E est dit un **vecteur** et un élément de $\mathbb{K}$ est dit un **scalaire**. L'opération $+$ est dite la **somme (vectorielle)**. L'opération $\cdot$ est dite la **multiplication par scalaire**.
On admettra le symbol $\cdot$, i.e., à la place d'écrire $\lambda \cdot u$, on écrira λu s'il n'y a pas de risque de confusion.

Sous-éspace vectoriel Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une partie $F \subset E$ est dite un **sous-espace vectoriel** de E lorsque les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

1. $F \neq \emptyset$,
2. $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$,
3. $\lambda u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in F$.

En effet, les conditions 2 et 3 pourra écrire en une condition :

Lemme Supposons que F est une partie non-vide de E. Alors, F est un sous-espace vectoriel si et seulement si $u + \lambda v \in F$ pour tous $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. $\square$

Remarque Concrètement, pour montrer que $F \neq \emptyset$, il suffit de montrer que $0 \in F$.