Résumé de Cours 2

Rappels sur Polynômes Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.

1. $\alpha \in \mathbb{C}$ est une **racine** du polynôme P si $P(\alpha) = 0$, i.e., $X - \alpha | P$.
2. La **multiplicité** d'une racine α de P est l'entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X - \alpha)^m | P$ mais $(X - \alpha)^{m+1} \nmid P$.

Une application de l'identité de Bézout :

Lemme (Gauss) Soit $P, Q, R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Si $P | Q \cdot R$ et que $PGCD(P, Q) = 1$, alors $P | R$. □

Dérivation

Une application $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ est dite une **dérivation** si

$$D(P + Q) = D(P) + D(Q), \qquad D(P \cdot Q) = D(P) \cdot Q + P \cdot D(Q) \qquad \forall\ P, Q \in \mathbb{K}[X].$$

Un example important est l'application $\frac{d}{dX} : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ (la dérivée de P par X) définie par

$$\frac{d}{dX}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\Big) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \qquad (a_k \in \mathbb{K}).$$

Pour un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, posons $P^{(k)} = \left(\frac{d}{dX}\right)^k P$.

Formule de Taylor Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme du degré $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$P(X) = P(\alpha) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(\alpha)(X - \alpha)^k.$$

Lemme Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est divisible par $(X - \alpha)^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ si et seulement si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0.$$

Fractions rationnelles

Une **fraction rationnelle** est un élḿent de l'ensemble

$$\left\{ \frac{P}{Q} \,\middle|\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q \neq 0 \right\},$$

avec la notion d'**égalité** suivante : pour $P, P', Q, Q' \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q, Q' \neq 0$,

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'} \qquad \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \qquad P \cdot Q' = P' \cdot Q.$$

C'est-à-dire, on '`identifie`' deux éléments $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{P'}{Q'}$ lorsque cette dernière condition est satisfaite.

Pour $P, P', Q, Q' \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q, Q' \neq 0$, on définit

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{P'}{Q'} := \frac{P \cdot P'}{Q \cdot Q'} \qquad (\textbf{produit}),$$
$$\frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q'} := \frac{P \cdot Q' + Q \cdot P'}{Q \cdot Q'} \qquad (\textbf{somme}).$$

Ces deux opérations (le produit et la somme) sont **bien-définies**.

Décomposition en éléments simples

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ deux polynômes non nuls.

Question

1. Quelle est une expression `simple` de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$?
2. Comment obtenir une telle expression pour $\dfrac{P}{Q}$?

Une réponse de ces questions est donnée par le théorème suivant :

Théorème Pour tout fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ avec $Q \neq 0$, il existe un polynôme S, polynômes irréductibles $Q_1, Q_2, \cdots, Q_r$, $m_1, m_2, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$, et polynômes $P_{i,k}$ $(1 \leq i \leq r$ et $1 \leq k \neq m_i)$ avec les conditions $d^o(P_{i,n_i}) < d^o(Q_i)$ tels que

$$\frac{P}{Q} = S + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{P_{i,k}}{Q_i^k}.$$

Cette expression s'appelle **dćomposition en éléments simples**. $\square$

Concrètement,

1. pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les polynômes Q_i sont polynômes de degré 1 donc $P_{i,k}$ sont constants, et
2. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les polynômes Q_i sont polynômes de degré au plus 2.

Alors, comment trouver cette décomposition pour $\dfrac{P}{Q}$ concrètement ?

Voici une recette :

Étape 1. Si $d^o(P) \geq d^o(Q)$, faire la division euclidienne : il existe polynômes S et R tels que

i) $P = SQ + R$ et ii) $d^o(R) < d^o(Q)$.

Alors, on a $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{SQ + R}{Q} = S + \dfrac{R}{Q}$. Donc, il suffit de considérer le cas $d^o(P) < d^o(Q)$.

Étape 2. Si $Q = Q_1^m$ avec un polynôme irréductible Q_1 de degré > 0, trouver les polynômes $A_0, A_1, \cdots, A_{m-1}$ de degré $< d^o(Q_1)$ tels que $P = \sum_{k=0}^{m-1} A_k Q_1^k$. Alors,

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} A_k Q_1^k}{Q_1^N} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k}{Q_1^{N-k}}.$$

Étape 3. Si $Q = Q_1^m Q_2$ avec un polynôme irréductible Q_1 et un polynôme Q_2 tel que $PGCD(Q_1, Q_2) = 1$, d'après l'identité de Bézout, il existe polynômes A et B tels que $AQ_1^m + BQ_2 = 1$. Alors,

$$\frac{1}{Q} = \frac{AQ_1^m + BQ_2}{Q_1^m Q_2} = \frac{A}{Q_2} + \frac{B}{Q_1^m} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{P}{Q} = \frac{PA}{Q_2} + \frac{PB}{Q_1^m}.$$

Ensuite et suite...... vous arriverez un jour !