Résumé de Cours 12

Quelques propriétés de déterminant Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatifs.

Lemme Pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. $\square$

Un corollaire utile est

Corollaire Si une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible, on a $\det(A) \neq 0$. $\square$

Pour calculs pratiques, le lemme suivant est aussi utile :

Lemme Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}$ une matrice bloc-diagonale, où $A_i \in M_{m_i}(\mathbb{K})$ avec $m_i \in \mathbb{N}^*$ pour $1 \leq i \leq r$. Alors,

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{r} \det(A_i).$$

Interprétation géométrique

Pour une matrice carrée $A = (\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n) \in M_n(\mathbb{R})$, soit

$$\Gamma_A := \{\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{a}_i | 0 \leq t_i \leq 1\}$$

le **parallélotope** engendré par $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. En particulier, dans le cas $n = 2$, ce n'est que le **parallélogramme** engendré par $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$.

La multi-linéarité et l'anti-symétrie du déterminant implique que

$$|\det A| \ = \ \mathrm{vol}(\Gamma_A),$$

où $\mathrm{vol}(\Gamma_A)$ signifie le volume de Γ_A.

Preuve pour $n = 2$ Soit $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in M_2(\mathbb{R})$. Par anti-symétrie, on a

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 + t\mathbf{a}_1) = \det(\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Alors, la forme des parallélogrammes changent mais ses aires sont toujours les mêmes. En appliquant ces transformations, on peut se ramener au cas où Γ_A devient un rectangle, en particulier, A est une matrice diagonale $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ qui a le déterminant égal à pq. Évidement, l'aire du rectangle engendré par $(p, 0)$ et $(0, q)$ est $|pq|$, ceci implique que $|\det(A)| = \mathrm{vol}(\Gamma_A)$. $\square$

Remarque Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Par définition, on a $\Gamma_A = u(\Gamma_{I_n})$. Découpant la carte cartésienne en petits morceaux, on voit que, pour tout $D \subset \mathbb{R}^n$ dont cela a du sens de parler de son volume, la formule suivante est valable :

$$\mathrm{vol}(u(D)) = |\det A| \mathrm{vol}(D).$$

Les détails seront traités plus tard en analyse. $\square$

Développement en cofacteurs

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. On va calculer $\det(A)$. Pour $1 \leq i, j \leq n$, posons

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_{i,j} :=& \begin{vmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix} \\
=&(-1)^{i+j} \begin{vmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

$\widetilde{A}_{i,j}$ est apellé le **cofacteur associé à** (i, j) de la matrice A et $(-1)^{i+j}\widetilde{A}_{i,j}$ est appelé le **mineur associé à** (i, j) de la matrice A.

Par multi-linéarité, on obtient :

Lemme Pour $1 \leq i, j \leq n$, on a

1. développement par rapport à la i-ième ligne : $\det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j}\widetilde{A}_{i,j}$,
2. développement par rapport à la j-ième colonne : $\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j}\widetilde{A}_{i,j}$.

En particulier, par anti-symétrie, on a

$$\sum_{j=1} a_{i,j}\widetilde{A}_{i',j} = \delta_{i,i'} \det(A), \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\widetilde{A}_{i,j'} = \delta_{j,j'} \det(A).$$

C'est-à-dire, posons $\mathrm{com}(A) := (\widetilde{A}_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K})$, on a

$$A \cdot {}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A) \cdot A = (\det(A))I_n.$$

Donc, on a

Lemme Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
2. Lorsque $\det(A) \neq 0$, on a
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{com}(A).$$

Attention Le 2ème énoncé est complètement inadapté pour calculer l'inverse d'une matrice. □

$\boxed{\textbf{Quelques cas particuliers}}$

Matrice triangluaire Développant sur 1ère colonne, on a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Donc, par récurrence, on obtient que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$, c.-à-d., le déterminant de A est le produit des composantes diagonales de A. Pareil pour une matrice triangulaire inférieure.

Matrice de Vandermonde Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. La matrice que l'on s'intéresse ici est

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculons $\det(V)$. Ajoutant $-\lambda_1$ fois la i-ième ligne à la $(i+1)$-ième ligne, dans l'ordre de $i = n-1, n-2, \cdots, 1$, ensuite développant sur la 1ère colonne, on voit que

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & (\lambda_n - \lambda_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1) \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Par récurrence, on obtient ce que l'on appelle le **déterminant de Vandermonde** :

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$