Résumé de Cours 11

Groupe symétrique (suite) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de degré n.

D'aprè la formule suivante :

$$(i_1, i_2, \cdots, i_{r-1}, i_r) = (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \cdots \circ (i_{r-1}, i_r) \qquad \text{(produit de } r-1 \text{ transpositions)},$$

on a

Lemme Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit sous forme de produits de transpositions. □

Remarque Soit $1 \leq i < j \leq n$. Pour $1 \leq k < n$, posons $\sigma_k = (k, k+1)$. Alors, on peut vérifier que

$$\begin{aligned}(i,j) =& \sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \cdots \circ \sigma_{j-2} \circ \sigma_{j-1} \circ \sigma_{j-2} \circ \cdots \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \qquad \text{(produit de } 2(j-i)-1 \text{ transpositions)} \\ =& \sigma_{j-1} \circ \sigma_{j-2} \circ \cdots \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \cdots \circ \sigma_{j-2} \circ \sigma_{j-1} \qquad \text{(produit de } 2(j-i)-1 \text{ transpositions).}\end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, on en déduit que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit sous forme de produit de $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$. On dit que le groupe $\mathfrak{S}_n$ est **engendré** par $\{\sigma_k\}_{1 \leq k < n}$. □

Soit $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{R}^*$ l'application définie par

$$\varepsilon(\sigma) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

On pourra vérifier que

1. l'application ε est un morphisme de groupes, c.-à-dire, $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$,
2. $\operatorname{Im} \varepsilon = \{\pm 1\}$.

Le morphisme ε (ou sa valeur $\varepsilon(\sigma)$) s'appelle le **signature** (de σ). ε est aussi noté par sgn.

Déterminant d'une Matrice Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > 1$. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on l'exprime comme $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$, où $\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$.

Lemme Il existe une application $F_n : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non triviale telle que

1. (multi-linéarité) pour $1 \leq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\begin{aligned}&F(\mathbf{a}_1, \cdots, \overset{j}{\smile}{\mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}'_j}, \cdots, \mathbf{a}_n) \\ =& F(\mathbf{a}_1, \cdots, \overset{j}{\smile}{\mathbf{a}_j}, \cdots, \mathbf{a}_n) + \lambda F(\mathbf{a}_1, \cdots, \overset{j}{\smile}{\mathbf{a}'_j}, \cdots, \mathbf{a}_n),\end{aligned}$$
2. (anti-symétrie) pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
$$F(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sgn} \sigma) F(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n).$$

□

Remarque L'antisymétrie pour $\sigma = (i, j)$ implique que

$$F(\mathbf{a}_1, \cdots, \overset{\overset{i}{\smile}}{\mathbf{a}_j}, \cdots, \overset{\overset{j}{\smile}}{\mathbf{a}_i}, \cdots, \mathbf{a}_n) = -F(\mathbf{a}_1, \cdots, \overset{\overset{i}{\smile}}{\mathbf{a}_i}, \cdots, \overset{\overset{j}{\smile}}{\mathbf{a}_j}, \cdots, \mathbf{a}_n).$$

En particulier, on a

$$F(\mathbf{a}_1, \cdots, \overset{\overset{i}{\smile}}{\mathbf{a}}, \cdots, \overset{\overset{j}{\smile}}{\mathbf{a}}, \cdots, \mathbf{a}_n) = 0.$$

Définition La valeur de $A \in M_n(\mathbb{K})$ par F_n du lemme ci-dessus normalisée par $F_n(I_n) = 1$ est dit le **déterminant** de A, noté $\det A$, ou encore $|A|$. Pour une matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$, il est aussi noté comme suit

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarque Voici une formule explicite du déterminant de $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{n \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{n \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}. \end{aligned}$$

D'après cette remarque, on a

Lemme Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\det({}^t A) = \det(A)$. □

En particulier, ce lemme implique que

`le déterminant est non seulement multilinéaire et antisymétrique`
`pour les colonnes mais aussi pour les lignes !`

Exemples

i) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale, i.e., $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Alors, $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

ii) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire, i.e.,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Alors, $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$. □