Résumé de Cours 10

Structures algébriques: morphisme

Un **morphisme** est une application $f : X \to Y$ permettant de comparer les structures de X et de Y. Voyons, ceci avec des exemples:

1. **Groupe**: soit G, G' groupes. Un morphisme de groupes $f : G \to G'$ est une application satisfaisant
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \text{ pour tous } x, y \in G.$$
2. **Anneau**: soit A, A' anneaux. Un morphisme d'anneaux $f : A \to A'$ est une application satisfaisant
$$f(a+b) = f(a) + f(b), \qquad f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \text{ pour tous } a, b \in A.$$
3. **Anneau unitaire**: soit A, A' anneaux unitaires.
Un morphisme d'anneaux unitaires est un morphisme d'anneau satisfaisant
$$f(1_A) = 1_{A'},$$
où 1_A et $1_{A'}$ sont les éléments neutres de A et A', respectivement.
4. **Espace vectoriel**: soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soir E, F $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Un morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $f : E \to F$ est une application satisfaisant
$$f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u) \text{ pour tous } u, v \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}.$$
C'est-à-dire, un morphisme d'espaces vectoriels n'est qu'une application linéaire.

Groupe symétrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble $\mathfrak{S}_n := \{\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\} : \text{bijective}\}$ des applications bijectives sur l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ avec la composition d'applications est muni d'une structure du groupe qui s'appelle le **groupe symétrique** ou **groupe de permutations** de **degré** n. Un élément de $\mathfrak{S}_n$ s'appelle une **permutation**. La composée de deux éléments σ et τ sera notée par $\sigma \circ \tau$, i.e., $(\sigma \circ \tau)(i) := \sigma(\tau(i))$ pour $1 \leq i \leq n$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on notera aussi

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Pour $1 \leq i \neq j \leq n$, le symbole (i, j) signifie la permutation qui permutes i et j, i.e., $(i, j)(i) = j$, $(i, j)(j) = i$, et fixes les autres $\in \{1, 2, \cdots, n\}$ que l'on appelle une **transposition**. Plus généralement, soit $1 \leq i_1, i_r, \cdots, i_r \leq n$ entiers tous différents. Alors, le symbole $(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ signifie la permutation qui envoie i_k vers i_{k+1} pour $1 \leq k < r$, i_r vers i_1 et fixes les autres que l'on appelle une **permutation circulaire d'ordre** r ou r**-cycle**.

Lemme Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit sous forme de produits de permutations circulaires. $\square$