Université Claude Bernard Lyon 1 - Printemps 2015

Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

Algèbre appliquée - MAT2054L

CONTRÔLE FINAL

Correction

EXERCICE 1

On se place dans l'anneau de polynômes $\mathbb{Q}[x, y, z]$ muni de l'ordre lexicographique $x > y > z$. On considère l'idéal

$$I = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 - 2x + y^2 + z^2, x + y - z\rangle.$$

1. Calculer une base de Gröbner de I.

   <u>Solution.</u> *On pose* $f_1 = x^2+y^2+z^2-1$, $f_2 = x^2-2x+y^2+z^2$ *et* $f_3 = x+y-z$. *Ainsi, on a* $x^2 \xrightarrow{f_1} -y^2 - z^2 + 1$, $x^2 \xrightarrow{f_2} 2x - y^2 - z^2$ *et* $x \xrightarrow{f_3} -y + z$. *On commence avec la paire critique* (f_1, f_2)

$$\begin{tikzcd}
 & x^2 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
-y^2 - z^2 + 1 & & 2x - y^2 - z^2 \arrow[d, "f_3"] \\
 & & -y^2 - 2y - z^2 + 2z \arrow[ull, "f_4"]
\end{tikzcd}$$

   et donc on ajoute $f_4 = y - z + \frac{1}{2}$, $y \xrightarrow{f_4} z - \frac{1}{2}$. *Pour la paire critique* (f_1, f_3), *on a*

$$\begin{tikzcd}
 & x^2 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_3"] & \\
-y^2 - z^2 + 1 \arrow[d, "f_4"] & & -xy + xz \arrow[d, "f_3"] \\
-2z^2 + z + \frac{3}{4} \arrow[drr, "f_5"] & & y^2 - 2yz + z^2 \arrow[d, "f_4"] \\
 & & \frac{1}{4}
\end{tikzcd}$$

   et donc on ajoute $f_5 = 2z^2 - z - \frac{1}{2}$, $z^2 \xrightarrow{f_5} \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}$. *Les paires critiques* (f_1, f_4) *et* (f_1, f_5) *sont confluentes puisque les termes dominants sont premiers entre eux.*

Pour la paire critique (f_2, f_3)*, on a*

$$\begin{tikzcd}
 & x^2 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_3"] & \\
2x - y^2 - z^2 \arrow[d, "f_3"] & & -xy - xz \arrow[d, "f_3"] \\
-y^2 - 2y - z^2 + 2z \arrow[d, "f_4"] & & y^2 - 2yz + z^2 \arrow[d, "f_4"] \\
-2z^2 + z + \frac{3}{4} \arrow[rr, "f_5"] & & \frac{1}{4}
\end{tikzcd}$$

et cette paire est confluente. Les paires critiques (f_2, f_4) *et* (f_2, f_5) *sont confluentes puisque les termes dominants sont premiers entre eux. De même, les paires critiques* (f_3, f_4)*,* (f_3, f_5) *et* (f_4, f_5) *sont confluentes. Il suit donc qu'une base de Gröbner de* I *est formée des polynômes* $f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1$*,* $f_2 = x^2 - 2x + y^2 + z^2$*,* $f_3 = x + y - z$*,* $f_4 = y - z + \frac{1}{2}$ *et* $f_5 = 2z^2 - z - \frac{1}{2}$*.*

2. En déduire que le système suivant admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \\ x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

Solution. *Soit* (x_0, y_0, z_0) *une solution du système. Alors elle est solution des polynômes* $f_1, \ldots, f_5$*. En particulier, on a* $f_5(z_0) = 2z_0^2 - z_0 - \frac{1}{2} = 0$*. Le discriminant de ce polynôme quadratique est* 5 *et ses racines sont* $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ *et* $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$*. Puisque* $f_4(y_0, z_0) = 0$*, on en déduit que* $y_0 = z_0 - \frac{1}{2}$ *et les valeurs de* y_0 *correspondantes. Finalement, en utilisant le fait que* $f_3(x_0, y_0, z_0) = 0$*, on a* $x_0 = z_0 - y_0$ *et on trouve* x_0*. (On peut voir aussi que* $f3 - f4$ *donne directement* $x_0 = \frac{1}{2}$*). On en déduit les deux solutions possibles :*

$$\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \quad \textit{et} \quad \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}, \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right).$$

On vérifie que ce sont bien des solutions du système.

EXERCICE 2

On travaille dans l'anneau de polynômes $\mathbb{R}[x, y, h]$. On considère l'idéal

$$I = \langle h^2x + h^2 + x - 1, h^2y - 2h + y \rangle.$$

Soit $J = I \cap \mathbb{R}[x, y]$. Montrer que $V(J)$ est le cercle de centre l'origine et de rayon 1.

Solution. *Pour déterminer* $I \cap \mathbb{R}[x, y]$*, on calcule une base de Gröbner de* I *pour l'ordre* *lexicographique* $h > x > y$. *On pose* $f_1 = h^2x + h^2 + x - 1$ *et* $f_2 = h^2y - 2h + y$. *On a* $h^2x \xrightarrow{f_1} -h^2 - x + 1$ *et* $h^2y \xrightarrow{f_2} 2h - y$. *Pour la paire critique* (f_1, f_2), *on a*

$$\begin{tikzcd} & h^2xy \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ -h^2y - xy + y \arrow[d, "f_2"] & & 2hx - xy \arrow[dll, "f_3"] \\ -2h - xy + 2y & & \end{tikzcd}$$

et donc on ajoute $f_3 = hx + h - y$, $hx \xrightarrow{f_3} -h + y$. *Pour la paire critique* (f_1, f_3), *on a*

$$\begin{tikzcd} & h^2x \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_3"] & \\ -h^2 - x + 1 & & -h^2 + hy \arrow[ll, "f_4"] \end{tikzcd}$$

et donc on ajoute $f_4 = hy + x - 1$, $hy \xrightarrow{f_4} -x + 1$. *Pour la paire critique* (f_1, f_4), *on a*

$$\begin{tikzcd} & h^2xy \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_4"] & \\ -h^2y - xy + y \arrow[d, "f_4"] & & -hx^2 + hx \arrow[d, "f_3"] \\ -2h - xy + 2y & & 2hx - xy \arrow[ll, "f_3"] \end{tikzcd}$$

et cette paire est confluente. Pour la paire critique (f_2, f_3), *on a*

$$\begin{tikzcd} & h^2xy \arrow[dl, "f_2"'] \arrow[dr, "f_3"] & \\ 2hx - xy \arrow[d, "f_3"] & & -h^2y + hy^2 \arrow[d, "f_2"] \\ -2h - xy + 2y & & hy^2 - 2h + y \arrow[ll, "f_4"] \end{tikzcd}$$

et cette paire est confluente. Pour la paire critique (f_2, f_4), *on a*

$$\begin{tikzcd} & h^2y \arrow[dl, "f_2"'] \arrow[dr, "f_4"] & \\ 2h - y & & -hx + h \arrow[ll, "f_3"] \end{tikzcd}$$

et cette paire est confluente. Pour la paire critique (f_3, f_4)*, on a*

$$\begin{tikzcd}
 & hxy \arrow[dl, "f_3"'] \arrow[dr, "f_4"] & \\
-hy+y^2 \arrow[d, "f_4"] & & -x^2+x \arrow[dll, "f_5"] \\
x+y^2-1 & &
\end{tikzcd}$$

et donc on ajoute $f_5 = x^2+y^2-1$, $x^2 \xrightarrow{f_5} -y^2+1$ *. Pour la paire critique* (f_1, f_5)*, on a*

$$\begin{tikzcd}
 & h^2x^2 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_5"] & \\
-h^2x-x^2+x \arrow[d, "f_1"] & & -h^2y^2+h^2 \arrow[d, "f_2"] \\
h^2-x^2+2x-1 \arrow[d, "f_5"] & & h^2-2hy+y^2 \arrow[dll, "f_4"] \\
h^2+2x+y^2-2 & &
\end{tikzcd}$$

et cette paire est confluente. La paire critique (f_2, f_5) *est confluente puisque les termes dominants sont premiers entre eux. Pour la paire critique* (f_3, f_5)*, on a*

$$\begin{tikzcd}
 & hx^2 \arrow[dl, "f_3"'] \arrow[dr, "f_5"] & \\
-hx+xy \arrow[d, "f_3"] & & -hy^2+h \arrow[dll, "f_4"] \\
h+xy-y & &
\end{tikzcd}$$

et cette paire est confluente. La paire critique (f_4, f_5) *est confluente puisque les termes dominants sont premiers entre eux. Il suit qu'un base de Gröbner de* I *est*

$$\left\{hx+h^2+x-1, h^2y-2h+y, hx+h-y, hy+x-1, x^2+y^2-1\right\}.$$

On a donc $J = \langle x^2+y^2-1\rangle$ *et* $V(J)$ *est le cercle de centre* 0 *et de rayon* 1*.*

EXERCICE 3

Soit I un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

1. Soit $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ une famille de polynômes de I telle que, pour tout $f \in I$, il existe une réduction de f modulo G égale à 0. Montrer que G est une base de Gröbner de I.

(Indication : on pourra considérer les S-polynômes $S(g_i, g_j)$ pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$.)

<u>Solution.</u> *On commence par démontrer que la famille* G *engendre* I. *Soit* $f \in G$. *Puisque* $f \xrightarrow{G} 0$ *, il existe donc des polynômes* $u_1, \dots, u_s$ *tels que*

$$f = u_1 g_1 + \cdots + u_s g_s$$

Ainsi $f \in \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ *et donc* $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$. *Soit* $i \neq j$. *Alors* $S(g_i, g_j) \in I$ *et donc, par hypothèse,* $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G} 0$ *. Ces deux propriétés assurent que* G *est une base de Gröbner de* I.

2. Soient $\leq_1$ et $\leq_2$ deux ordres monomiaux sur $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Soit $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ une base de Gröbner de I pour l'ordre $\leq_1$. Supposons que, pour tout i, le terme dominant de g_i est le même pour l'ordre $\leq_1$ et l'ordre $\leq_2$. Montrer que G est aussi une base de Gröbner de I pour l'ordre $\leq_2$.

<u>Solution.</u> *Soient* f, g, h_1, h_2 *des polynômes. Pour éviter toute confusion, on dénote par* $f \xrightarrow[1]{g} h_1$ *et par* $f \xrightarrow[2]{g} h_2$ *une réduction de* f *par* g *pour l'ordre* $\leq_1$ *et l'ordre* $\leq_2$ *respectivement. Maintenant, soit* $i \in \{1, \dots, s\}$. *On considère une réduction* $f \xrightarrow[1]{g_i} h$ *. Par définition, cela signifie qu'il existe un monôme* m *de* f *divisible par* $\mathrm{lt}_1(g_i)$*, le terme dominant de* g *pour l'ordre* $\leq_1$*, et que* $h = f - \frac{m}{\mathrm{lt}_1(g_i)} g_i$. *Mais, par hypothèse, on a* $\mathrm{lt}_1(g_i) = \mathrm{lt}_2(g_i)$ *et donc* $\mathrm{lt}_2(g_i)$ *divise* m *et on a toujours* $h = f - \frac{m}{\mathrm{lt}_2(g_i)} g_i$. *Ainsi, on a également la réduction* $f \xrightarrow[2]{g_i} h$ *.*

Soit $f \in I$. *Puisque* G *est une base de Gröbner de* I *pour* $\leq_1$*, il existe une suite d'indices* $i_1, \dots, i_t \in \{1, \dots, s\}$ *tels que*

$$f \xrightarrow[1]{g_{i_1}} f_1 \xrightarrow[1]{g_{i_2}} f_2 \xrightarrow[1]{g_{i_3}} \cdots \xrightarrow[1]{g_{i_t}} 0$$

où $f_1, f_2, \dots$ *sont les réductions successives de* f. *Par la discussion ci-dessus, toutes les réductions pour l'ordre* $\leq_1$ *peuvent être aussi considérées comme des réductions pour l'ordre* $\leq_2$. *On a donc*

$$f \xrightarrow[2]{g_{i_1}} f_1 \xrightarrow[2]{g_{i_2}} f_2 \xrightarrow[2]{g_{i_3}} \cdots \xrightarrow[2]{g_{i_t}} 0.$$

En conclusion, pour tout $f \in I$*, il existe une réduction de* f *modulo* G *pour l'ordre* $\leq_2$ *égale à* 0 *et donc, par la question 1,* G *est aussi une base de Gröbner de* I *pour l'ordre* $\leq_2$.