

## CONTRÔLE FINAL

Correction

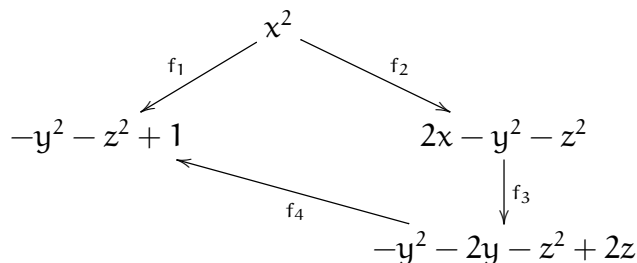
### EXERCICE 1

On se place dans l'anneau de polynômes  $\mathbb{Q}[x, y, z]$  muni de l'ordre lexicographique  $x > y > z$ . On considère l'idéal

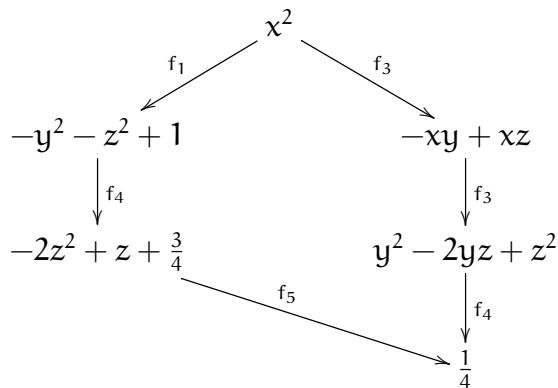
$$I = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 - 2x + y^2 + z^2, x + y - z \rangle.$$

1. Calculer une base de Gröbner de  $I$ .

*Solution.* On pose  $f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ,  $f_2 = x^2 - 2x + y^2 + z^2$  et  $f_3 = x + y - z$ . Ainsi, on a  $x^2 \xrightarrow{f_1} -y^2 - z^2 + 1$ ,  $x^2 \xrightarrow{f_2} 2x - y^2 - z^2$  et  $x \xrightarrow{f_3} -y + z$ . On commence avec la paire critique  $(f_1, f_2)$

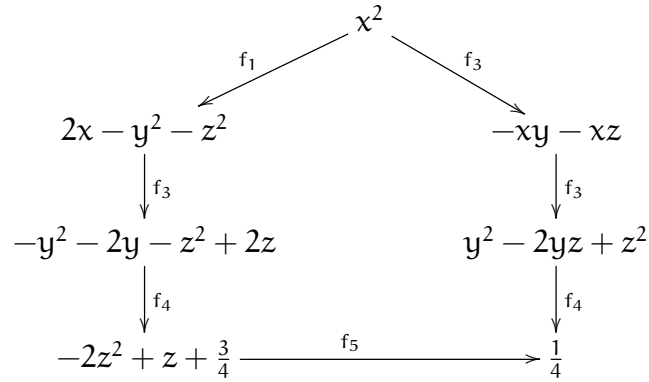


et donc on ajoute  $f_4 = y - z + \frac{1}{2}$ ,  $y \xrightarrow{f_4} z - \frac{1}{2}$ . Pour la paire critique  $(f_1, f_3)$ , on a



et donc on ajoute  $f_5 = 2z^2 - z - \frac{1}{2}$ ,  $z^2 \xrightarrow{f_5} \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}$ . Les paires critiques  $(f_1, f_4)$  et  $(f_1, f_5)$  sont confluentes puisque les termes dominants sont premiers entre eux.

Pour la paire critique  $(f_2, f_3)$ , on a



et cette paire est confluente. Les paires critiques  $(f_2, f_4)$  et  $(f_2, f_5)$  sont confluentes puisque les termes dominants sont premiers entre eux. De même, les paires critiques  $(f_3, f_4)$ ,  $(f_3, f_5)$  et  $(f_4, f_5)$  sont confluentes. Il suit donc qu'une base de Gröbner de  $I$  est formée des polynômes  $f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ,  $f_2 = x^2 - 2x + y^2 + z^2$ ,  $f_3 = x + y - z$ ,  $f_4 = y - z + \frac{1}{2}$  et  $f_5 = 2z^2 - z - \frac{1}{2}$ .

2. En déduire que le système suivant admet deux solutions dans  $\mathbb{R}$  que l'on déterminera :

$$\begin{cases}
 x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \\
 x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0, \\
 x + y - z = 0.
 \end{cases}$$

Solution. Soit  $(x_0, y_0, z_0)$  une solution du système. Alors elle est solution des polynômes  $f_1, \dots, f_5$ . En particulier, on a  $f_5(z_0) = 2z_0^2 - z_0 - \frac{1}{2} = 0$ . Le discriminant de ce polynôme quadratique est 5 et ses racines sont  $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$  et  $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ . Puisque  $f_4(y_0, z_0) = 0$ , on en déduit que  $y_0 = z_0 - \frac{1}{2}$  et les valeurs de  $y_0$  correspondantes. Finalement, en utilisant le fait que  $f_3(x_0, y_0, z_0) = 0$ , on a  $x_0 = z_0 - y_0$  et on trouve  $x_0$ . (On peut voir aussi que  $f_3 - f_4$  donne directement  $x_0 = \frac{1}{2}$ ). On en déduit les deux solutions possibles :

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right).$$

On vérifie que ce sont bien des solutions du système.

## EXERCICE 2

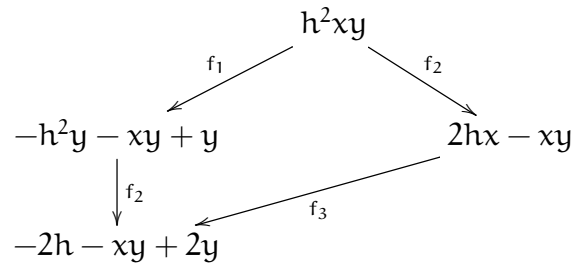
On travaille dans l'anneau de polynômes  $\mathbb{R}[x, y, h]$ . On considère l'idéal

$$I = \langle h^2x + h^2 + x - 1, h^2y - 2h + y \rangle.$$

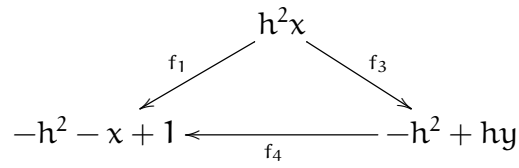
Soit  $J = I \cap \mathbb{R}[x, y]$ . Montrer que  $V(J)$  est le cercle de centre l'origine et de rayon 1.

Solution. Pour déterminer  $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ , on calcule une base de Gröbner de  $I$  pour l'ordre

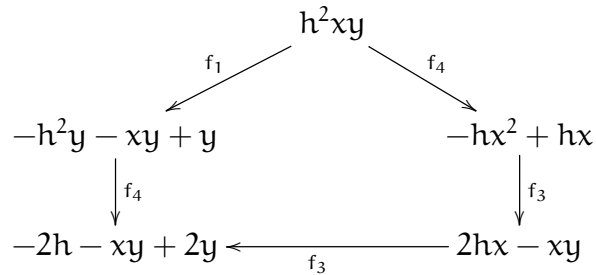
lexicographique  $h > x > y$ . On pose  $f_1 = h^2x + h^2 + x - 1$  et  $f_2 = h^2y - 2h + y$ . On a  $h^2x \xrightarrow{f_1} -h^2 - x + 1$  et  $h^2y \xrightarrow{f_2} 2h - y$ . Pour la paire critique  $(f_1, f_2)$ , on a



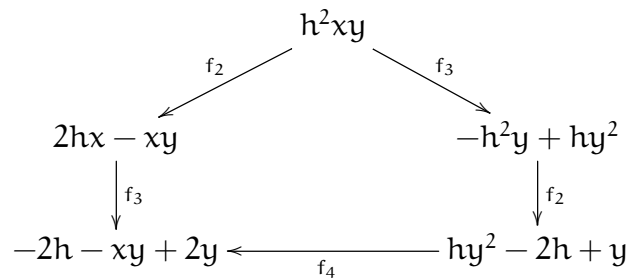
et donc on ajoute  $f_3 = hx + h - y$ ,  $hx \xrightarrow{f_3} -h + y$ . Pour la paire critique  $(f_1, f_3)$ , on a



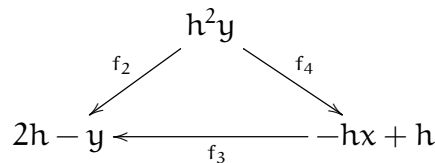
et donc on ajoute  $f_4 = hy + x - 1$ ,  $hy \xrightarrow{f_4} -x + 1$ . Pour la paire critique  $(f_1, f_4)$ , on a



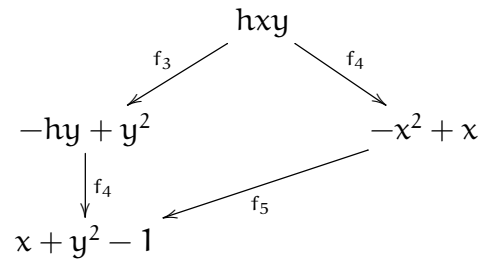
et cette paire est confluente. Pour la paire critique  $(f_2, f_3)$ , on a



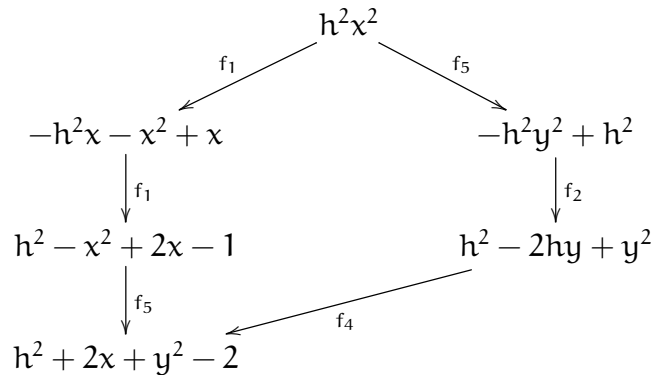
et cette paire est confluente. Pour la paire critique  $(f_2, f_4)$ , on a



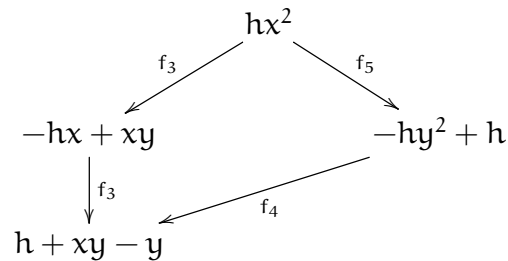
et cette paire est confluente. Pour la paire critique  $(f_3, f_4)$ , on a



et donc on ajoute  $f_5 = x^2 + y^2 - 1$ ,  $x^2 \xrightarrow{f_5} -y^2 + 1$ . Pour la paire critique  $(f_1, f_5)$ , on a



et cette paire est confluente. La paire critique  $(f_2, f_5)$  est confluente puisque les termes dominants sont premiers entre eux. Pour la paire critique  $(f_3, f_5)$ , on a



et cette paire est confluente. La paire critique  $(f_4, f_5)$  est confluente puisque les termes dominants sont premiers entre eux. Il suit qu'une base de Gröbner de  $I$  est

$$\{hx + h^2 + x - 1, h^2y - 2h + y, hx + h - y, hy + x - 1, x^2 + y^2 - 1\}.$$

On a donc  $J = \langle x^2 + y^2 - 1 \rangle$  et  $V(J)$  est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

### EXERCICE 3

Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

1. Soit  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$  une famille de polynômes de  $I$  telle que, pour tout  $f \in I$ , il existe une réduction de  $f$  modulo  $G$  égale à 0. Montrer que  $G$  est une base de Gröbner de  $I$ .

(Indication : on pourra considérer les S-polynômes  $S(g_i, g_j)$  pour tout couple  $(i, j)$  avec  $i \neq j$ .)

Solution. On commence par démontrer que la famille  $G$  engendre  $I$ . Soit  $f \in G$ . Puisque  $f \xrightarrow{G} 0$ , il existe donc des polynômes  $u_1, \dots, u_s$  tels que

$$f = u_1 g_1 + \dots + u_s g_s$$

Ainsi  $f \in \langle g_1, \dots, g_s \rangle$  et donc  $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ . Soit  $i \neq j$ . Alors  $S(g_i, g_j) \in I$  et donc, par hypothèse,  $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G} 0$ . Ces deux propriétés assurent que  $G$  est une base de Gröbner de  $I$ .

2. Soient  $\leq_1$  et  $\leq_2$  deux ordres monomiaux sur  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Soit  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$  une base de Gröbner de  $I$  pour l'ordre  $\leq_1$ . Supposons que, pour tout  $i$ , le terme dominant de  $g_i$  est le même pour l'ordre  $\leq_1$  et l'ordre  $\leq_2$ . Montrer que  $G$  est aussi une base de Gröbner de  $I$  pour l'ordre  $\leq_2$ .

Solution. Soient  $f, g, h_1, h_2$  des polynômes. Pour éviter toute confusion, on dénote par  $f \xrightarrow[1]{g} h_1$  et par  $f \xrightarrow[2]{g} h_2$  une réduction de  $f$  par  $g$  pour l'ordre  $\leq_1$  et l'ordre  $\leq_2$  respectivement. Maintenant, soit  $i \in \{1, \dots, s\}$ . On considère une réduction  $f \xrightarrow[1]{g_i} h$ . Par définition, cela signifie qu'il existe un monôme  $m$  de  $f$  divisible par  $\text{lt}_1(g_i)$ , le terme dominant de  $g$  pour l'ordre  $\leq_1$ , et que  $h = f - \frac{m}{\text{lt}_1(g_i)} g_i$ . Mais, par hypothèse, on a  $\text{lt}_1(g_i) = \text{lt}_2(g_i)$  et donc  $\text{lt}_2(g_i)$  divise  $m$  et on a toujours  $h = f - \frac{m}{\text{lt}_2(g_i)} g_i$ . Ainsi, on a également la réduction  $f \xrightarrow[2]{g_i} h$ .

Soit  $f \in I$ . Puisque  $G$  est une base de Gröbner de  $I$  pour  $\leq_1$ , il existe une suite d'indices  $i_1, \dots, i_t \in \{1, \dots, s\}$  tels que

$$f \xrightarrow[1]{g_{i_1}} f_1 \xrightarrow[1]{g_{i_2}} f_2 \xrightarrow[1]{g_{i_3}} \dots \xrightarrow[1]{g_{i_t}} 0$$

où  $f_1, f_2, \dots$  sont les réductions successives de  $f$ . Par la discussion ci-dessus, toutes les réductions pour l'ordre  $\leq_1$  peuvent être aussi considérées comme des réductions pour l'ordre  $\leq_2$ . On a donc

$$f \xrightarrow[2]{g_{i_1}} f_1 \xrightarrow[2]{g_{i_2}} f_2 \xrightarrow[2]{g_{i_3}} \dots \xrightarrow[2]{g_{i_t}} 0.$$

En conclusion, pour tout  $f \in I$ , il existe une réduction de  $f$  modulo  $G$  pour l'ordre  $\leq_2$  égale à 0 et donc, par la question 1,  $G$  est aussi une base de Gröbner de  $I$  pour l'ordre  $\leq_2$ .