Feuille d'exercices n° 8

Calculs d'intégrales et de primitives

1 Calculs d'intégrales et de primitives

Exercice 8.1. Calculer :

$$a. \int \ln x \, dx \qquad b. \int \mathrm{Arctan}\, x \, dx \qquad c. \int_0^1 (x^3+1)e^{-x} \, dx \qquad d. \int_1^2 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \, dx$$

Exercice 8.2. Calculer :

$$a. \int x e^{1+x^2} \, dx \qquad b. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \qquad c. \int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$$

Exercice 8.3.

1. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx.$$

2. En déduire les valeurs de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta) \, d\theta \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi} \, d\varphi.$$

3. Le résultat de la première question est-il vrai ou faux si l'on suppose seulement f continue par morceaux ? Donner une démonstration ou un contre-exemple.

Exercice 8.4. Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes (sauf indication expresse de l'énoncé, il n'est pas demandé d'expliciter l'intervalle sur lequel on calcule) :

$$a. \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \qquad b. \int \frac{x}{x^2-3x+2} \, dx \qquad c. \int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} \, dx \qquad d. \int \frac{x^4}{x^3-3x+2} \, dx$$

$$e. \int \frac{1}{x^2+4} \, dx \qquad f. \int \frac{x}{x^2-4x+9} \, dx \qquad g. \int \frac{dx}{x^3-1} \qquad h. \int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} \, dx$$

$$i. \int \frac{dx}{x^{500}(x-1)} \qquad j. \int \frac{x^5+x+1}{x^4(x-1)^3} \, dx \qquad k. \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \qquad l. \int \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2006} \frac{dx}{x^2}$$

$$m. \int \frac{6x^2+2}{x^4+x^2+1} \, dx \qquad n. \int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1} \, dx \qquad o. \int \frac{dx}{4x^2+4x+5} \qquad p. \int \frac{5x}{x^4+1} \, dx$$

$$q. \int \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2} \, dx \qquad r. \int \frac{2x+4}{x^3+5x^2+9x+5} \, dx \qquad s. \int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)} \, dx \qquad t. \int \frac{7}{(x+1)^7-x^7-1} \, dx$$

Exercice 8.5. En utilisant le changement de variable $t = \pi - x$, calculer :

$$\int_0^\pi x \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

Exercice 8.6. Calculer :

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ (poser $t = e^{-x}$) *b.* $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (poser $t = \sqrt{x+1}$) *c.* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ (poser $t = \sqrt{2}/x$)

d. $\displaystyle\int x^2 \ln(x^6-1)\, dx$ (poser $t = x^3$) *e.* $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\, dx\right)$ *f.* $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$

Exercice 8.7. Calculer la dérivée $\dfrac{d}{d\varphi}[\ln(|\tan\varphi|)]$. En déduire :

$$a. \int \frac{d\theta}{\sin\theta} \quad b. \int \frac{d\theta}{\cos\theta} \quad c. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

2 Encore des calculs d'intégrales

Exercice 8.8. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 (2-x)^n e^x\, dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$:
$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2-1).$$
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n.$$
5. Montrer que $\dfrac{2^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
6. En déduire que $1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!}$ tend vers e^2 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.9. Calculer les intégrales ou les primitives suivantes :

a. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}$ *b.* $\displaystyle\int (\operatorname{Arcsin} x)^2\, dx$ *c.* $\displaystyle\int \frac{dt}{(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^n}$ *d.* $\displaystyle\int \ln(x^2+2)\, dx$

e. $\displaystyle\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ *f.* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ *g.* $\displaystyle\int \frac{\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi$ *h.* $\displaystyle\int \sqrt{\frac{t+7}{t+6}}\, dt$

i. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}\, dx$