

Feuille d'exercices n° 3

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET UTILISATIONS

Exercice 3.1. Donner pour chacune des fonctions proposées ci-dessous un équivalent simple :

- (a). $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \rightarrow 0$,
- (b). $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \rightarrow +\infty$,
- (c). $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \rightarrow 2$,
- (d). $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \rightarrow 1$,
- (e). $f(x) = x^7 + \sqrt{x} + (\ln x)^2 + e^{2x} + 4x^5 - x^9 + 5^{x+1}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 3.2. Établir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n proposé :

- a. $f(x) = e^{-x}$ et $n = 5$
- b. $f(x) = \ln(1 + x^2)$ et $n = 6$
- c. $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ et $n = 7$
- d. $f(x) = e^{3x} \sin(2x)$ et $n = 4$
- e. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ et $n = 3$
- f. $f(x) = \tan x$ et $n = 5$
- g. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}$ et $n = 3$
- h. $f(x) = (1+x)^{1/x}$ et $n = 3$
- i. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ et $n = 3$
- j. $f(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{1+x}\right)$ et $n = 4$
- k. $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{sh} x}$ et $n = 4$
- l. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ et $n = 3$.

Exercice 3.3. Déterminer les réels a et b pour que $\cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$ soit un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible au voisinage de 0.

- Exercice 3.4.**
1. Déterminer $\arcsin^{(6)}(0)$,
 2. Faire un développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
 3. En déduire un développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction \arcsin ,
 4. Déterminer $\arcsin^{(7)}(0)$.

Exercice 3.5. Calculer les limites suivantes (sans présupposer leur existence) :

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$
- b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x - \frac{3}{2} \sin(2x)}$
- c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \ln(\cos x)}{x^4}$
- d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x - \sin(2x)}{x(1 - \cos(3x))}$
- e. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$
- f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$
- g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}$
- h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$
- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

Exercice 3.6. Calculer un développement limité ou asymptotique de la fonction f dans chacun des cas suivants :

- (a). $f(x) = x^2 \ln x$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5,
- (b). $f(x) = \sqrt{2+x}$ où x tend vers 0 et à l'ordre 3,
- (c). $f(x) = \ln(2+x)$ où x tend vers 0 et à l'ordre 2,
- (d). $f(x) = \sin x$ où x tend vers $\frac{\pi}{4}$ et à l'ordre 3,
- (e). $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 1$ à l'ordre 5, d'abord pour x tendant vers 0, puis pour x tendant vers 1,
- (f). $f(x) = \ln(\sin x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 3,
- (g). $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs,
- (h). $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs.

Exercice 3.7. Calculer les limites suivantes (en montrant leur existence) :

- (a). $\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$ quand x tend vers 1,
- (b). $\sqrt{\frac{x^3 - 2x}{x-1}} - x$ quand x tend vers $+\infty$,
- (c). $x \left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1} \right)^x \right)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 3.8. Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{6}; 0[\cup]0; \frac{\pi}{6}[$ par $f(x) = \frac{\ln(1 - 2 \sin x)}{\operatorname{sh}(2x)}$.

1. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que f possède une limite quand x tend vers 0. On notera l cette limite dans la suite de l'exercice.
3. On pose $f(0) = l$. Montrer que f , ainsi prolongée, est dérivable en 0.

Exercice 3.9. On définit, pour $x \in]0; +\infty[$, les fonctions f et g par

$$f(x) = \arctan x - \arctan(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\arctan x}{\arctan(x+1)}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ pour x tendant vers $+\infty$. En remarquant que $f(x) \sim \tan(f(x))$ quand x tend vers $+\infty$, en déduire que $f(x) \sim -\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de $g(x)$, puis montrer que $\ln(g(x)) \sim \frac{f(x)}{\arctan(x+1)}$ en $+\infty$.
3. Déduire de ce qui précède la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\arctan x}{\arctan(x+1)} \right)^{x^2}$.

Exercice 3.10. Soient f et g les deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par

$$f(x) = \ln(1 - x^2) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - 1.$$

1. Déterminer les développements limités de f et de g à l'ordre 5, quand x tend vers 0.
2. Déduire de ces développements limités l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta; 0[\cup]0; \eta[$, $f(x) < g(x)$.