Université Claude Bernard - Lyon 1

Feuille d'exercices n° 2

FONCTIONS RÉCIPROQUES

Exercice 2.1. Calculer les expressions suivantes :

a. $\mathrm{Arcsin}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **b**. $\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$ **c**. $\mathrm{sh}\left(\mathrm{Argsh}\left(\dfrac{1}{5}\right)\right)$ **d**. $\mathrm{Argch}\left(\mathrm{ch}(1-\ln 5)\right)$

e. $\mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$ **f**. $\mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)\right)$ **g**. $\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\dfrac{82\pi}{11}\right)\right)$.

Exercice 2.2. Tracer les graphes des fonctions suivantes :

(**i**).$\theta \longmapsto \mathrm{Arccos}(\cos(\theta))$ (**ii**).$\theta \longmapsto \mathrm{Arcsin}(\sin(\theta))$ (**iii**).$\theta \longmapsto \mathrm{Arctan}(\tan(\theta))$.

Exercice 2.3. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \mathrm{Argth}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
2. Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$ et en déduire une expression plus simple de chacune des restrictions de f aux trois intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;+\infty[$.

Exercice 2.4.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P du quatrième degré tel que pour tout réel x, on ait l'identité $16x^6 + 24x^4 + 9x^2 + 1 = (x^2+1)P(x)$ et expliciter ce polynôme.
2. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \mathrm{Argsh}(3x + 4x^3)$.
   (a) Préciser l'ensemble de définition de f, puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
   (b) Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$. En déduire une expression plus simple de $f(x)$.

Exercice 2.5. On considère la fonction définie par $f(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites éventuelles de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ aux points où ce calcul est possible, en justifiant avec précision, puis étudier les variations de f.
4. Discuter l'aspect des tangentes ou demi-tangentes éventuelles au graphe de f aux points d'abscisses respectives -1 et 1. Tracer sommairement le graphe de f. En quels points f est-elle dérivable ?

Exercice 2.6. Mêmes questions que l'exercice précédent avec la fonction définie par $g(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.

Exercice 2.7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(u) = 3\operatorname{ch}(u) - 4$ et soit g la fonction définie par $g(u) = \operatorname{Arcsin}(3\operatorname{ch}(u) - 4)$.

1. Montrer que pour tout réel u, on a : $u \in [-\ln 3; \ln 3] \Leftrightarrow f(u) \in [-1; 1]$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de g, et préciser l'ensemble des points où g est continue.
3. En précisant son domaine de validité, démontrer la formule suivante : $g'(u) = \dfrac{3\operatorname{sh}(u)}{\sqrt{3\big(\operatorname{ch}(u)-1\big)\big(5-3\operatorname{ch}(u)\big)}}$.
4. Déterminer les limites de cette expression aux bornes de son domaine de validité. (Suggestion : pour l'un des calculs de cette question, écrire $\operatorname{sh}(u)$ et $\operatorname{ch}(u)$ en fonction de $\operatorname{sh}(u/2)$ et $\operatorname{ch}(u/2)$.)
5. Déterminer l'ensemble des points où g est dérivable.
6. Dresser le tableau de variations de g puis tracer sommairement son graphe.

Exercice 2.8. Soit a et b deux réels strictement positifs. On note θ l'argument du nombre complexe $a + ib$ qui vérifie $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. En se penchant sur le triangle de sommets 0, a et $a + ib$, montrer que :

$$\theta = \operatorname{Arctan} \frac{b}{a}.$$

En déduire que le réel

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}$$

est un argument du nombre complexe $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$. Calculer également les parties réelle et imaginaire de $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$ et en déduire une expression simple de :

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}.$$

Exercice 2.9.

1. Montrer que $0 \leq \operatorname{Arcsin} \dfrac{4}{5} + \operatorname{Arcsin} \dfrac{5}{13} \leq \dfrac{\pi}{2}$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} \dfrac{4}{5} + \operatorname{Arcsin} \dfrac{5}{13}$.

Exercice 2.10. On considère l'équation d'inconnue réelle x : $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} \qquad (E)$.

1. Montrer que toute solution de (E) est positive.
2. Résoudre (E).

Exercice 2.11. Montrer que $\operatorname{Arcsin} \dfrac{4}{5} = 2 \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2}$.
On pourra utiliser la formule donnant $\sin(\theta)$ en fonction de $\tan(\theta/2)$.

Exercice 2.12. Montrer que $\operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3 = \pi$.

Exercice 2.13. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{x}{x^2+1} \leq \operatorname{Arctan} x$.