Résumé de Cours 9

Application linéaire et Matrice Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ et $\mathcal{C} = \{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_m\}$ des bases de E et F, respectivement. Soit $a_{i,j}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ des scalaires tels que $f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j}\mathbf{f}_i$ pour tout $1 \leq j \leq n$ (attention aux indices !). La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

s'appelle la **matrice de f dans les base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** et notée par $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Soit $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j\mathbf{e}_j \in E$ avec $x_j \in \mathbb{K}$. Posons $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m y_i\mathbf{f}_i = f(\mathbf{x})$. Par définition, on a

$$\mathbf{y} = f(\sum_{j=1}^n x_j\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j f(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{i,j}\mathbf{f}_i\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right)\mathbf{f}_i,$$

d'où $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$. Posons $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_m \end{pmatrix}$, on en conclut que

$$Y = AX \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{x})) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}).$$

Interprétations d'opérations sur matrices

Soit E, F $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $f, g : E \to F$ deux applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$. On peut définir l'application linéaire $f+g, \lambda f : E \to F$ par $(f+g)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ et $(\lambda f)(\mathbf{x}) := \lambda f(\mathbf{x})$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F, respectivement. Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$. On a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f+g) = A + B, \qquad \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f) = \lambda A.$$

Soit E, F, G $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ applications linpaires. On sait que la composée $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire.
Soit $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des bases de E, F et G, respectivement. Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)$ et $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. On a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = AB.$$

Remarque (non-traitées en cours) En fixant des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F respectivement, on obtient un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{m,n}(\mathbb{K})$ ($\dim E = n,\ \dim F = m$) par

$$\mathcal{L}(E, F) \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{K}); \qquad f \longmapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

En particulier, $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{K})$ comme anneau.
(Un isomorphisme est un morphisme dont la réciproque est aussi un morphisme.) $\square$

$\boxed{\textbf{Changement de bases}}$ (Attention aux indices !)

1ère étape Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_n\}$ deux bases de E. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, pour tout $1 \leq j \leq n$, il existe un unique n-plet $(p_{1,j}, \cdots, p_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\mathbf{e}_i.$$

Alors, pour $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j\mathbf{e}'_j \in E$, on a

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j\mathbf{e}'_j = \sum_{j=1} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}x'_j\right)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i.$$

Posons $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$ et $X' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x})$, on en conclut que

$$X = PX' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x}).$$

La matrice $P = (p_{i,j}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ s'appelle la **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.**
Notons que cette matrice est inversible avec son inverse $P^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$.

2ème étape Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E et soit $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ des bases de F. On pose $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. Notons les matrices de passages de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ pr P et $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ par Q.

`Trouver le liens entre les matrices` A `et` B `!` Pour $\mathbf{x} \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{mat}_{\mathcal{C}'}(f(\mathbf{x})) =& \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_F)\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{x})) = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{id}_F)^{-1}\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{x}))\\
=& \mathrm{mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{id}_F)^{-1}\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})\\
=& \mathrm{mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{id}_F)^{-1}\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x})\\
=& \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{id}_F)^{-1}\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) \qquad \Longleftrightarrow \qquad B = Q^{-1}AP.$$

Remarque Soit $\mathbf{x} \in E$. Posons $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}), X' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x})$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{x})), Y' = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}'}(f(\mathbf{x}))$. Alors, on a

$$Y = AX, \qquad Y' = BX', \qquad X = PX', \qquad Y = QY',$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
Y =& AX = APX'\\
=& QY' = QBX',
\end{aligned}$$

d'où $AP = QB$, i.e., $B = Q^{-1}AP$. □

Application Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F, respectivement. Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Alors, on a

le rang de l'application linéaire f = le rang de la matrice A.