Résumé de Cours 3

Rappels sur Polynômes Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.

1. $\alpha \in \mathbb{C}$ est une **racine** du polynôme P si $P(\alpha) = 0$, i.e., $X - \alpha | P$.
2. La **multiplicité** d'une racine α de P est l'entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X - \alpha)^m | P$ mais $(X - \alpha)^{m+1} \nmid P$.

Une application de l'identité de Bézout :

<u>**Lemme**</u> (Gauss) Soit $P, Q, R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Si $P|Q \cdot R$ et que $PGCD(P, Q) = 1$, alors $P|R$. □

Fraction rationnelle

Rappelons qu'une **fraction rationnelle** est un élément de l'ensemble

$$\mathbb{K}(X) := \left\{ \frac{P}{Q} \,\middle|\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q \neq 0 \right\}$$

avec la règle suivante :

deux éléments $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{P'}{Q'}$ (de $\mathbb{K}(X)$) représentent un même élément si l'égalité $P \cdot Q' = P' \cdot Q$ est satisfait.

Décomposition en éléments simples

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ deux polynômes non nuls.

<u>Question</u>

1. Quelle est une expression `simple` de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$?
2. Comment obtenir une telle expression pour $\dfrac{P}{Q}$?

Une réponse de ces questions est donnée par le théorème suivant :

Théorème Pour tout fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ avec $Q \neq 0$, il existe un polynôme S, polynômes irréductibles $Q_1, Q_2, \cdots, Q_r$, $m_1, m_2, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$, et polynômes $P_{i,k}$ ($1 \leq i \leq r$ et $1 \leq k \neq m_i$) avec les conditions $d^o(P_{i,n_i}) < d^o(Q_i)$ tels que

$$\frac{P}{Q} = S + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{P_{i,k}}{Q_i^k}.$$

Cette expression s'appelle **dcomposition en éléments simples**. □

Concrètement,

1. pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les polynômes Q_i sont polynômes de degré 1 donc $P_{i,k}$ sont constants, et
2. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les polynômes Q_i sont polynômes de degré au plus 2.

Alors, comment trouver cette décomposition pour $\dfrac{P}{Q}$ concrètement ?

Voici une recette :

<u>Étape 1.</u> Si $d^o(P) \geq d^o(Q)$, faire la division euclidienne : il existe polynômes S et R tels que
i) $P = SQ + R$ et ii) $d^o(R) < d^o(Q)$.
Alors, on a $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{SQ+R}{Q} = S + \dfrac{R}{Q}$. Donc, il suffit de considérer le cas $d^o(P) < d^o(Q)$.

<u>Étape 2.</u> Si $Q = Q_1^m$ avec un polynôme irréductible Q_1 de degré > 0, trouver les polynômes $A_0, A_1, \cdots, A_{m-1}$ de degré $< d^o(Q_1)$ tels que $P = \sum_{k=0}^{m-1} A_k Q_1^k$. Alors,

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} A_k Q_1^k}{Q_1^N} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k}{Q_1^{N-k}}.$$

<u>Étape 3.</u> Si $Q = Q_1^m Q_2$ avec un polynôme irréductible Q_1 et un polynôme Q_2 tel que $PGCD(Q_1, Q_2) = 1$, d'après l'identité de Bézout, il existe polynômes A et B tels que $AQ_1^m + BQ_2 = 1$. Alors,

$$\frac{1}{Q} = \frac{AQ_1^m + BQ_2}{Q_1^m Q_2} = \frac{A}{Q_2} + \frac{B}{Q_1^m} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{P}{Q} = \frac{PA}{Q_2} + \frac{PB}{Q_1^m}.$$

Ensuite et suite...... vous arriverez un jour !

<u>Quelque cas particulier de $\dfrac{P}{Q}$.</u>

1. $d^o(P) < d^o(Q)$ et $Q = \prod_{i=1}^N (X - \alpha_i)$ ($\alpha_i \in \mathbb{K}$). Alors, il existe des scalaires $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ($1 \leq i \leq r$) tels que

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{X - \alpha_i}.$$

Dans ce cas, pour calculer λ_j ($1 \leq j \leq r$),

1. multiplier $(X - \alpha_j)$ à deux cotés :

$$(X-\alpha_j)\frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_{j-1})(X-\alpha_{j+1})\cdots(X-\alpha_r)} = \lambda_j + (X-\alpha_j)\sum_{i\neq j}\frac{\lambda_i}{X-\alpha_i}.$$

2. évaluer-les en α_j :

$$\lambda_j = \frac{P(\alpha_j)}{(\alpha_j-\alpha_1)\cdots(\alpha_j-\alpha_{j-1})(\alpha_j-\alpha_{j+1})\cdots(\alpha_j-\alpha_r)} = \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}.$$

2^*. (Non-traité en cours, donc pour ceux qui veut s'amuser !) $Q = (X-\alpha)^N Q_1$ avec $Q_1(\alpha) \neq 0$. Trouver $a_0, a_1 \cdots a_{N-1} \in \mathbb{K}$ et $R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = (\sum_{k=0}^{N-1} a_k (X-\alpha)^k) Q_1 + (X-\alpha)^N R$. Alors,

$$\frac{P}{Q} = \frac{(\sum_{k=0}^{N-1} a_k (X-\alpha)^k) Q_1 + (X-\alpha)^N R}{(X-\alpha)^N Q_1} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{(X-\alpha)^{N-k}} + \frac{R}{Q_1}.$$

Pour trouver $a_0, a_1, \cdots, a_{N-1}$, posons $Y = X - \alpha$ et considérer les polynômes P_0 et Q_0 tels que $P_0(Y) = P(X)$ et $Q_0(Y) = Q_1(Y)$. En faisant la division en puissance croissance de P_0 par Q_0, on trouvera $a_0, a_1, \cdots, a_{N-1} \in \mathbb{K}$ et un polyôme R_0 tel que $P_0 = Q_0 \sum_{k=0}^{N-1} a_k Y^k + Y^N R_0$. Posons $R(X) = R_0(X-\alpha)$, on obtient l'expression que l'on a cherché.