Résumé de Cours 2

Polynômes irréductibles ou scindés Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit

1. **scindé** si P s'écrit comme produit de polynômes du degré 1,
2. **irréductible** s'il est ni nul, ni constant, ni produit de deux polynômes non-constants.

Le théorème suivant est connu sous le nom de **théorème fondamental de l'algèbre** :

Théorème (D'Alembert-Gauss) Tout polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ est scindé. $\square$

Corollaire Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme irréductible. Alors, $d^\circ(P) \leq 2$. $\square$

Évaluation d'un polynôme

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré strictement positif. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on pourra considérer l'**évaluation de** P **en** α, i.e., $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$. Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$(P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha), \qquad (P \cdot Q)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha).$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ et un scalaire $R \in \mathbb{K}$ tels que

$$P(X) = Q(X)(X - \alpha) + R.$$

Évaluant en α, on obtient $R = P(\alpha)$.

Lemme Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est divisible par $X - \alpha$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

Généralisons ce lemme !

Dérivation

Une application $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ est dite une **dérivation** si

$$D(P+Q) = D(P) + D(Q), \qquad D(P \cdot Q) = D(P) \cdot Q + P \cdot D(Q) \qquad \forall\ P, Q \in \mathbb{K}[X].$$

Un example important est l'application $\frac{d}{dX} : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ (la dérivée de P par X) définie par

$$\frac{d}{dX}(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \qquad (a_k \in \mathbb{K}).$$

Pour un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, posons $P^{(k)} = \left(\frac{d}{dX}\right)^k P$.

Formule de Taylor Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme du degré $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$P(X) = P(\alpha) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(\alpha)(X - \alpha)^k.$$

Lemme Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est divisible par $(X - \alpha)^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0.$$

Fractions rationnelles

Une **fraction rationnelle** est un élḿent de l'ensemble

$$\left\{ \frac{P}{Q} \middle| P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q \neq 0 \right\},$$

avec la notion d'**égalité** suivante : pour $P, P', Q, Q' \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q, Q' \neq 0$,

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'} \qquad \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \qquad P \cdot Q' = P' \cdot Q.$$

C'est-à-dire, on '`identifie`' deux éléments $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ lorsque cette dernière condition est satisfaite.

Pour $P, P', Q, Q' \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q, Q' \neq 0$, on définit

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{P'}{Q'} := \frac{P \cdot P'}{Q \cdot Q'} \qquad (\textbf{produit}),$$
$$\frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q'} := \frac{P \cdot Q' + Q \cdot P'}{Q \cdot Q'} \qquad (\textbf{somme}).$$

Ces deux opérations (le produit et la somme) sont **bien-définies**.