Résumé de Cours 12

Développement en cofacteurs

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. On va calculer $\det(A)$. Pour $1 \le i, j \le n$, posons

$$\widetilde{A}_{i,j} := \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

$\widetilde{A}_{i,j}$ est apellé le **cofacteur associé à** (i, j) de la matrice A et $(-1)^{i+j}\widetilde{A}_{i,j}$ est appelé le **mineur associé à** (i, j) de la matrice A.

Par multi-linéarité, on obtient :

Lemme Pour $1 \le i, j \le n$, on a

1. développement par rapport à la i-ième ligne : $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\widetilde{A}_{i,j}$,
2. développement par rapport à la j-ième colonne : $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\widetilde{A}_{i,j}$.

En particulier, par anti-symétrie, on a

$$\sum_{j=1} a_{i,j}\widetilde{A}_{i',j} = \delta_{i,i'} \det(A), \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\widetilde{A}_{i,j'} = \delta_{j,j'} \det(A).$$

C'est-à-dire, posons $\mathrm{com}(A) := (\widetilde{A}_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{K})$, on a

$$A \cdot {}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A) \cdot A = (\det(A))I_n.$$

Donc, on a

Lemme Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
2. Lorsque $\det(A) \neq 0$, on a
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{com}(A).$$

Attention Le 2ème énoncé est complètement inadapté pour calculer l'inverse d'une matrice. □

Quelques cas particuliers

Matrice triangluaire Développant sur 1ère colonne, on a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Donc, par récurrence, on obtient que $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$, c.-à-d., le déterminant de A est le produit des composantes diagonales de A. Pareil pour une matrice triangulaire inférieure.

Matrice de Vandermonde Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. La matrice que l'on s'intéresse ici est

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculons $\det(V)$. Ajoutant $-\lambda_1$ fois la i-ième ligne à la $(i+1)$-ième ligne, dans l'ordre de $i = n-1, n-2, \cdots, 1$, ensuite développant sur la 1ère colonne, on voit que

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & (\lambda_n - \lambda_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1) \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Par récurrence, on obtient ce que l'on appelle le **déterminant de Vandermonde** :

$$\det(V) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Matrice circulaire Soient $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$, on considère la matrice

$$C := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Soit ω une n-ième racine de l'unité, e.g., $\omega = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\right)$. Pour $0 \le i < n$, on pose $\mathbf{v}_i := {}^t(1, \omega^i, \cdots, \omega^{(n-1)i})$. Posons $Q(\lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$, on voit que $C\mathbf{v}_i = Q(\omega^i)\mathbf{v}_i$ pour $0 \le i < n$. Donc, posons $P = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{n-1})$ et

$$D := \begin{pmatrix} Q(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q(\omega^{n-1}) \end{pmatrix},$$

on obtient $CP = PD$. Par le déterminant de Vandermonde, on a $\det(P) = \prod_{0 \le i \le j < n} (\omega^j - \omega^i) \ne 0$, donc P est inversible. On a

$$\det(C) = \det(PDP^{-1}) = \det(D) = \prod_{i=0}^{n-1} Q(\omega^i) = \prod_{i=0}^{n-1} (a_0 + a_1\omega^i + \cdots + a_{n-1}\omega^{(n-1)i}).$$