Résumé de Cours 10

Transposée d'une Matrice Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille (m, n) sur $\mathbb{K}$. La **transposée** de A est la matrice $B = (b_{i,j})$ de taille (n, m) définie par $b_{i,j} := a_{j,i}$ pour tous $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$. La transposée de A est notée par ${}^tA$. Voici une propriété importante :

Lemme Puur toutes matrices A de taille (l, m), B de taille (m, n), on a ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$. $\square$

Le rang d'une matrice : supplément

Un corollaire immédiat du lemme ci-dessus est

Corollaire Pour toute matrice A, on a $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$. $\square$

D'après ce corollaire et le pivot de Gauss, on en déduit le lemme suivant :

Lemme Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille (m, n). Éxprimons A comme

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_m \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}'_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \cdots, a_{i,n}).$$

Alors,

$$\mathrm{rg}(A) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \cdots, \mathbf{a}'_m).$$

Remarque Soit A une matrice de taille (m, n). Considérons le système d'équations linéaires $AX = \mathbf{b}$ avec $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ $(x_1, \cdots, x_n$: inconnus) et $\mathbf{b} = {}^t(b_1, \cdots, b_n)$ $(b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{K})$. Le lemme précédent implique que

$$\text{le rang de } A \quad = \quad \text{le nombre d'équations indépendantes.}$$

Groupe symétrique Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble $\mathfrak{S}_n := \{\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\} : \text{bijective}\}$ des applications bijectives sur l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ avec la composition d'applications est muni d'une structure du groupe qui s'appelle le **groupe symétrique** ou **groupe de permutations** de **degré** n. Un élément de $\mathfrak{S}_n$ s'appelle une **permutation**. La composée de deux éléments σ et τ sera notée par $\sigma \circ \tau$, i.e., $(\sigma \circ \tau)(i) := \sigma(\tau(i))$ pour $1 \leq i \leq n$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on notera aussi

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Pour $1 \leq i \neq j \leq n$, le symbole (i, j) signifie la permutation qui permutes i et j, i.e., $(i, j)(i) = j$, $(i, j)(j) = i$, et fixes les autres $\in \{1, 2, \cdots, n\}$ que l'on appelle une **transposition**. Plus généralement, soit $1 \leq i_1, i_r, \cdots, i_r \leq n$ entiers tous différents. Alors, le symbole $(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ signifie la permutation qui envoie i_k vers i_{k+1} pour $1 \leq k < r$, i_r vers i_1 et fixes les autres que l'on appelle une **permutation circulaire d'ordre** r ou r**-cycle**.

Lemme Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit sous forme de produits de permutations circulaires. □

De plus, la formule suivante est facile de vérifier :

$$(i_1, i_2, \cdots, i_{r-1}, i_r) = (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \cdots \circ (i_{r-1}, i_r) \qquad \text{(produit de } r-1 \text{ transpositions).}$$

Ceci implique

Lemme Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit sous forme de produits de transpositions. □

Remarque Soit $1 \leq i < j \leq n$. Pour $1 \leq k < n$, posons $\sigma_k = (k, k+1)$. Alors, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} (i, j) &= \sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \cdots \circ \sigma_{j-2} \circ \sigma_{j-1} \circ \sigma_{j-2} \circ \cdots \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \qquad \text{(produit de } 2(j-i)-1 \text{ transpositions)} \\ &= \sigma_{j-1} \circ \sigma_{j-2} \circ \cdots \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \cdots \circ \sigma_{j-2} \circ \sigma_{j-1} \qquad \text{(produit de } 2(j-i)-1 \text{ transpositions).} \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, on en déduit que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit sous forme de produit de $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$. On dit que le groupe $\mathfrak{S}_n$ est **engendré** par $\{\sigma_k\}_{1 \leq k < n}$. □

Soit $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{R}^*$ l'application définie par

$$\varepsilon(\sigma) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

On pourra vérifier que

1. $\operatorname{Im} \varepsilon = \{\pm 1\}$,
2. $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$.

L'application ε (ou sa valeur $\varepsilon(\sigma)$) s'appelle le **signature** (de σ). ε est aussi noté par sgn.

Remarque Lorsqu'une application $f : G \to G'$ entre deux groupes satisfait

$$f(xy) = f(x)f(y) \qquad \text{pour tous } x, y \in G,$$

on appelle f un **morphisme** (de groupes). De ce qui précède, on voit que `le signature est un morphisme de groupes`. ($\{\pm 1\}$ est un groupe avec le produit défini par la multiplication.) □